GAAL – Prova 3 – Turma 7

26/10/2026

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20%] Determine a posição relativa das retas.

$$r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad s\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Os vetores diretores $(1, 1, -1)$ e $(2, 1, 0)$ não são proporcionais.
Para verificar se há interseção:

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2\lambda \\ t &= 1 + \lambda \\ 2 - t &= 1 \end{aligned}$$

A última equação dá $t = 1$ e a segunda dá $\lambda = 0$.
A primeira exigiria $2 = 0$, impossível.
Portanto, as retas são reversas.

2 [20%] Determine a posição relativa das retas

$$r\colon (x,y,z) = (0,1,1) + t(1,-1,2) \qquad s\colon (x,y,z) = (2,0,0) + \lambda(1,1,0)$$

Os vetores diretores $(1,-1,2)$ e $(1,1,0)$ não são proporcionais. Igualando as coordenadas:

$$\begin{aligned} t &= 2 + \lambda \\ 1 - t &= \lambda \\ 1 + 2t &= 0 \end{aligned}$$

A última dá $t = -1/2$ e a segunda dá $\lambda = 3/2$
A primeira exigiria $-1/2 = 7/2$, impossível
As retas são reversas

3 [20%] Determine o ângulo entre os vetores $\vec{v} = (1,0,1)$ e $\vec{w} = (0,1,1)$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \qquad \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = \sqrt{2}$

Logo $\cos\theta = 1/2$ e $\theta = 60^\circ$

4 [20%] Verifique se $\vec{w} = (2, 5, 3)$ é combinação linear de $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0,1,1)$

Procuramos a, b tais que

$$a(1,1,0) + b(0,1,1) = (2,5,3)$$

Comparando coordenadas, $a = 2$, $a + b = 5$ e $b = 3$, compatíveis.
Portanto,

$$\vec{w} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$$

5 [20%] Obtenha, por Gram–Schmidt, uma base ortonormal que gere o mesmo espaço que os vetores $\vec{v}_1 = (1,0)$ e $\vec{v}_2 = (1,1)$

$\vec{u}_1 = (1,0) \qquad \vec{e}_1 = (1,0)$

Em seguida,

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 \\ &= (1,1) - (1,0) \\ &= (0,1)\end{aligned}$$

Como $\|\vec{u}_2\| = 1$, temos $\vec{e}_2 = (0,1)$
A base ortonormal é

$$\{(1,0),(0,1)\}$$