

Operações com Matrizes

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Igualdade, Soma, Subtração e Produto por Escalar

Multiplicação

Transposição

Igualdade de matrizes

Duas matrizes são iguais se

1. possuem a mesma ordem
2. os elementos correspondentes são iguais

Assim,

$$A = B$$

se, e somente se,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Exemplo 1

Determine x e y sabendo que

$$\begin{pmatrix} 2x & 3 \\ 4 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

Comparando os elementos correspondentes

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

$$y - 1 = 5$$

$$y = 5 + 1$$

$$y = 6$$

Exemplo 2

Determine x , y e z sabendo que

$$\begin{pmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

Comparando os elementos correspondentes

$$x + 1 = 5$$

$$x = 5 - 1$$

$$x = 4$$

$$2y = 8$$

$$y = \frac{8}{2}$$

$$y = 4$$

$$z - 2 = 7$$

$$z = 7 + 2$$

$$z = 9$$

Adição de Matrizes

A soma de duas matrizes é definida apenas quando elas possuem a mesma ordem

Se

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad \text{e} \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

então

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

ou seja, somamos os elementos correspondentes

Exemplo 3

Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ avalie $A + B$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 5 & 2 + (-1) \\ 3 + 2 & 4 + 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 4

Calcule $A + B$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + 1 & -3 + 2 & 1 + (-4) \\ 4 + (-2) & 0 + 3 & 5 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Subtração de Matrizes

A subtração só é definida para matrizes de **mesma ordem**

Se

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad \text{e} \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

Podemos escrever

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo 5

Avalie a subtração de A por B , sendo $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 - 4 & 3 - 5 \\ 2 - (-2) & -1 - 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 6

Calcule $A - B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 - 2 & -2 - 1 & 4 - (-3) \\ 1 - 4 & 3 - (-2) & -1 - 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ -3 & 5 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Multiplicação por Escalar

Se c é um escalar (número real) e A é uma matriz, então

$$cA$$

é obtida multiplicando **cada elemento** de A por c

Se

$$A = (a_{ij})$$

então

$$cA = (ca_{ij})$$

Exemplo 7

Considerando $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ avalie $3A$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned} 3A &= 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3(-2) \\ 3 \times 3 & 3 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 8

Calcule $-2A$, onde $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Exemplo 8 – Solução

$$\begin{aligned} -2A &= -2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \times 3 & (-2)(-1) & -2 \times 2 \\ -2 \times 0 & -2 \times 4 & (-2)(-5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 0 & -8 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propriedades

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

- | | |
|--|-----------------------------|
| (i) $A + B = B + A$ | comutatividade |
| (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ | associatividade |
| (iii) $A + \mathcal{O} = A$ | elemento neutro na adição |
| (iv) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ | distributividade do escalar |
| (v) $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$ | distributividade da matriz |
| (vi) $0A = \mathcal{O}$ | |
| (vii) $(\lambda_1 \lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$ | |

Exemplo 9

Calcule $2A - 3B$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 9 – Solução

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 0 & 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3B = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3(-1) \\ 3 \times 3 & 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 6 & 4 - (-3) \\ 0 - 9 & -2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$$

Exemplo 10

Considerando $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, calcule $3A - 2B$

Exemplo 10 – Solução

$$3A = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3(-1) \\ 3 \times 3 & 3 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2(-1) & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 & -3 - 4 \\ 9 - (-2) & 0 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 11 & -8 \end{pmatrix}$$

Conteúdo

Igualdade, Soma, Subtração e Produto por Escalar

Multiplicação

Transposição

Produto de Matrizes

Se $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$ então o produto

$$AB$$

é definido e resulta em uma matriz

$$M_{m \times p} = AB$$

Condição

número de colunas de A = número de linhas de B

Definição

Dadas duas matrizes $A_{m \times k}$ e $B_{k \times n}$, podemos definir a **matriz produto**

$$C_{m \times n} = AB$$

cujos elementos são obtidos pela fórmula

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^k a_{il}b_{lj}$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$

Calculando o Produto

Considere

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Então

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Propriedades do Produto Matricial

(i) $A(BC) = (AB)C$

associatividade

(ii) $I_m A_{m \times n} = A_{m \times n}$ e $A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}$

elemento neutro

(iii) $A(B + C) = AB + AC$

(iv) $(B + C)A = BA + CA$

(v) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

para qualquer escalar α

Atenção: em geral $AB \neq BA$

Exemplo 11

Considerando $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, calcule AB

Exemplo 11 – Solução

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 12

Calcule BA com as matrizes anteriores

Exemplo 12 – Solução

$$\begin{aligned}BA &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 5 \times 1 + 6 \times 3 & 5 \times 2 + 6 \times 4 \\ 7 \times 1 + 8 \times 3 & 7 \times 2 + 8 \times 4 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} \\&\neq \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} = AB\end{aligned}$$

Exemplo 13

Calcule AB , onde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Exemplo 13 – Solução

Observe que a matriz

$$M = A_{2 \times 3} B_{3 \times 2}$$

é definida e produz uma matriz 2×2

Exemplo 13 – Solução

$$\begin{aligned} M = AB &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-1)3 + 3(-1) & 2 \times 2 + (-1)0 + 3 \times 4 \\ 0 \times 1 + 4 \times 3 + 1(-1) & 0 \times 2 + 4 \times 0 + 1 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conteúdo

Igualdade, Soma, Subtração e Produto por Escalar

Multiplicação

Transposição

Matriz Transposta

A transposta de uma matriz A é obtida trocando suas linhas por colunas

A transposta de A é indicada por

$$A^T \quad \text{ou} \quad A^t$$

Se

$$A = (a_{ij})$$

então

$$A^T = A^t = (a_{ji})$$

Propriedades da Transposição

$$(i) \quad (A^t)^t = A$$

$$(ii) \quad (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(iii) \quad (AB)^t = B^t A^t$$

$$(iv) \quad (\alpha A)^t = \alpha A^t$$

Exemplo 14

Determine a transposta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exemplo 14 – Solução

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemplo 15

Determine a matriz transposta de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Exemplo 15 – Solução

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemplo 16

Considerando $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcule $v = x^t Ax$

Exemplo 16 – Solução

$$x^t = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1(-1) \\ 1 \times 2 + 3(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v = x^t Ax = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \times 3 + (-1)(-1) = 7$$

Matrizes Simétricas

Uma matriz quadrada, A_n , é dita **simétrica**, se

$$A = A^t$$

isto é, se $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall \quad 1 \leq i, j \leq n$

Ela é **antissimétrica**, se

$$A = -A^t$$

exemplo isto é, se $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall \quad 1 \leq i, j \leq n$