

Escalonamento de Matrizes

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Sistemas Equivalentes

Escalonamento de Matrizes

Escalonamento de Sistemas Lineares

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas lineares são equivalentes
quando possuem as mesmas soluções

Operações elementares sobre linhas produzem sistemas equivalentes

Operações Elementares Sobre Linhas

1. Troca de duas linhas

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

2. Multiplicação de uma linha por um número não nulo

$$L_i \leftarrow kL_i \quad k \neq 0$$

3. Adição de um múltiplo de uma linha a outra

$$L_i \leftarrow L_i + kL_j$$

Exemplo 1

Operação elementar: troca de linhas

Considerando $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Troque a primeira e a segunda linhas

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Operação elementar: **multiplicação de uma linha**

Considerando $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Transforme o primeiro elemento da primeira linha em 1, fazendo

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Nova linha 1

$$L'_1 = \frac{1}{2}L_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Operação elementar: **combinação de linhas**

Considerando $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Produza um zero na linha 2 coluna 1, usando

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Conteúdo

Sistemas Equivalentes

Escalonamento de Matrizes

Escalonamento de Sistemas Lineares

Por que escalonar uma matriz?

Transformar uma matriz em uma forma **mais simples** preservando informações importantes

Utilizar operações elementares para produzir **zeros em posições estratégicas**

Aplicações:

- ▶ resolução de sistemas lineares
- ▶ identificação da existência e quantidade de soluções
- ▶ determinação do posto de uma matriz
- ▶ cálculo da inversa de uma matriz
- ▶ análise de dependência linear

Matriz Escalonada

Uma matriz está em **forma escalonada** quando:

1. todas as linhas nulas estão abaixo das linhas não nulas
2. o **pivô** (primeiro elemento não nulo da linha) está à direita do pivô da linha anterior
3. todos os elementos abaixo de um pivô são nulos

Exemplo de matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4

Determine quais das matrizes abaixo estão em forma escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz A está escalonada

1. os pivôs estão progressivamente mais à direita
2. todos os elementos abaixo dos pivôs são nulos

Exemplo 4 – Solução

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

A matriz B não está escalonada

o pivô da terceira linha está à esquerda do pivô da segunda linha

Pode ser escalonada com a troca da segunda e terceira linhas

Exemplo 4 – Solução

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz C está escalonada

1. os pivôs estão progressivamente mais à direita
2. todos os elementos abaixo dos pivôs são nulos
3. as linhas nulas estão abaixo das linhas não nulas

Exemplo 5

Escalone a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Exemplo 5 – Solução

Utilizamos operações elementares sobre as linhas
até obter uma matriz em forma escalonada

Exemplo 5 – Primeira Coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L'_3 = L_3 + L_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5 – Segunda Coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos abaixo do segundo pivô

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$L'_3 = L_3 - L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

Portanto, uma forma escalonada de A é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Exemplo 5 – Notação Resumida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Exemplo 6

Escalone a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 6 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L'_3 = L_3 + L_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos abaixo do segundo pivô

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$L'_3 = L_3 - L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conteúdo

Sistemas Equivalentes

Escalonamento de Matrizes

Escalonamento de Sistemas Lineares

Sistemas Lineares

O sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Pode ser representado matricialmente como

$$A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada

Matriz Aumentada do sistema $A \bar{x} = \bar{b}$

$$\left[A \mid \bar{b} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{21} & a_{23} & a_{33} & b_3 \end{array} \right]$$

Ao escalonar a matriz aumentada obtemos
uma versão simplificada do sistema linear original

Exemplo 7

Utilize o escalonamento para resolver o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 5y + z = 8 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Exemplo 7 – Matriz Aumentada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 7 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \left[2 \ 5 \ 1 \mid 8 \right] - 2 \left[1 \ 2 \ -1 \mid 3 \right] = \left[0 \ 1 \ 3 \mid 2 \right]$$

$$L'_3 = L_3 + L_1 = \left[-1 \ -1 \ 2 \mid 1 \right] + \left[1 \ 2 \ -1 \mid 3 \right] = \left[0 \ 1 \ 1 \mid 4 \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Exemplo 7 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do segundo pivô

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$L'_3 = L_3 - L_2 = \left[-1 \quad -1 \quad 2 \mid 1 \right] - \left[2 \quad 5 \quad 1 \mid 8 \right] = \left[0 \quad 0 \quad -2 \mid 2 \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right]$$

Exemplo 7 – Sistema Linear Escalonado

Matriz aumentada do sistema escalonado

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right]$$

Sistema linear escalonado

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & +2y & -z = 3 \\ & y & +3z = 2 \\ & & -2z = 2 \end{array} \right.$$

Exemplo 7 – Substituição Retroativa

Última linha

$$-2z = 2$$

$$z = -1$$

Segunda linha

$$y + 3z = 2$$

$$y + 3(-1) = 2$$

$$y - 3 = 2$$

$$y = 5$$

Primeira linha

$$x + 2y - z = 3$$

$$x + 2 \times 5 - (-1) = 3$$

$$x + 10 + 1 = 3$$

$$x = -8$$

Exemplo 7 – Solução

A solução do sistema é $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

Exemplo 8

Resolva o sistema, utilizando escalonamento,

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 6 \\ 2x & -y & +z & = 3 \\ x & +2y & -z & = 2 \end{cases}$$

Exemplo 8 – Matriz Aumentada

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

Exemplo 8 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & -9 \end{array} \right]$$

$$L'_3 = L_3 - L_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right]$$

Exemplo 8 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right]$$

Trocamos a segunda e terceira linhas
 $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$L'_2 = L_3 = \left[0 \quad 1 \quad -2 \mid -4 \right]$$

$$L'_3 = L_2 = \left[0 \quad -3 \quad -1 \mid -9 \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{array} \right]$$

Exemplo 8 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do segundo pivô

$$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

$$\begin{aligned} L'_3 &= L_3 + 3L_2 = \left[0 \quad -3 \quad -1 \mid -9 \right] + 3 \left[0 \quad 1 \quad -2 \mid -4 \right] \\ &= \left[0 \quad 0 \quad -7 \mid -21 \right] \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right]$$

Exemplo 8 – Sistema Linear Escalonado

Matriz aumentada do sistema escalonado

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right]$$

Sistema linear escalonado

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x & +y & +z & & = 6 \\ & y & -2z & & = -4 \\ & & -7z & & = -21 \end{array} \right.$$

Exemplo 8 – Substituição Retroativa

Última linha

$$-7z = -21$$

$$z = 3$$

Segunda linha

$$y - 2z = -4$$

$$y - 2 \times 3 = -4$$

$$y - 6 = -4$$

$$y = 2$$

Primeira linha

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2 + 3 = 6$$

$$x = 1$$

Exemplo 8 – Solução

A solução do sistema é $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$