

Classificação de Sistemas Lineares

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Tipos de Sistemas Lineares

Um sistema pode ser classificado com relação ao número de soluções

- ▶ Sistema possível e determinado
possui **uma única** solução
- ▶ Sistema possível e indeterminado
possui **infinitas** soluções
- ▶ Sistema impossível
não possui soluções

Identificando o Tipo de Sistema Linear

Podemos identificar o tipo de sistema diretamente da sua forma escalonada

Exemplo 1

Sistema possível e determinado

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{array} \right]$$

Possui uma única solução

Exemplo 2

Sistema possível e indeterminado

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Possui infinitas soluções

x e y ficam em função de z que pode assumir qualquer valor

Exemplo 3

Sistema impossível

Se uma linha tiver a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{array} \right] \quad f \neq 0$$

Não possui solução

Não importa os valores de x , y ou z

$$0x + 0y + 0z = 0 \neq f$$

Exemplo 4

Use escalonamento para analisar o sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Exemplo 4 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Exemplo 4 – Solução

A segunda linha representa

$$0 = 2$$

o que é uma contradição

Portanto, o sistema é **incompatível** e não possui solução

Exemplo 5

Use escalonamento para analisar o sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Exemplo 5 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Exemplo 5 – Solução

A segunda linha representa

$$0 = 0$$

Portanto, o sistema possui **infinitas** soluções

Exemplo 6

Use escalonamento para analisar o sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Exemplo 6 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do primeiro pivô
 $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \left[2 \quad -1 \mid 1 \right] - 2 \left[1 \quad 1 \mid 4 \right] = \left[0 \quad -3 \mid -7 \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -7 \end{array} \right]$$

O escalonamento produz dois pivôs e, portanto, uma única solução

Exemplo 7

Considere a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

1. Escalone a matriz
2. Determine o tipo de sistema
3. Encontre a solução do sistema se ele for possível

Exemplo 7 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

Eliminamos os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = [2 \ 5 \ 1 \mid 10] - 2[1 \ 2 \ -1 \mid 4] = [0 \ 1 \ 3 \mid 2]$$

$$L'_3 = L_3 + L_1 = [-1 \ -1 \ 2 \mid -1] + [1 \ 2 \ -1 \mid 4] = [0 \ 1 \ 1 \mid 3]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Exemplo 7 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Eliminamos os elementos abaixo do segundo pivô

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$L'_3 = L_3 - L_2 = \left[0 \quad 1 \quad 1 \mid 3 \right] - \left[0 \quad 1 \quad 3 \mid 2 \right] = \left[0 \quad 0 \quad -2 \mid 1 \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 7 – Classificação

O sistema é possível e determinado

Exemplo 7 – Substituição Retroativa

$$-2z = 1$$

$$z = \frac{-1}{2}$$

$$y + 3z = 2$$

$$y + 3\frac{-1}{2} = 2$$

$$y - \frac{3}{2} = 2$$

$$y = 2 + \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{7}{2}$$

$$x + 2y - z = 4$$

$$x + 2\frac{7}{2} - \frac{-1}{2} = 4$$

$$x + 7 + \frac{1}{2} = 4$$

$$x = -3 - \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{3 \times 2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-7}{2}$$

Exemplo 7 – Solução

A solução do sistema é $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 7/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$