

Método de Gauss-Jordan

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Forma Escalonada Reduzida

Forma Escalonada Reduzida

Forma escalonada reduzida

- ▶ A matriz está em forma escalonada
- ▶ Cada pivô é igual a 1
- ▶ O pivô é o único elemento não nulo de sua coluna

Exemplo de matriz escalonada reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

O processo para obter a Forma Escalonada Reduzida é chamado de
Eliminação de Gauss-Jordan

Exemplo 1

Transforme a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

em sua forma escalonada reduzida

Exemplo 1 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L'_3 = L_3 - L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada

Exemplo 1 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazemos todos os pivôs iguais a 1

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$$

$$L'_3 = \frac{1}{2}L_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos acima do terceiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L'_1 = L_1 - L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos acima do segundo pivô

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$L'_1 = L_1 - 2L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada reduzida de A

Exemplo 2

Determine a forma escalonada reduzida da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L'_3 = L_3 + L_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Fazendo com que o segundo pivô seja 1
 $L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$

$$L'_2 = -\frac{1}{3}L_2 = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos abaixo do segundo pivô

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$$

$$L'_3 = L_3 - 5L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo com que o terceiro pivô seja 1
 $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$

$$L'_3 = \frac{1}{2}L_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos acima do terceiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$L'_2 = L_2 + L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L'_1 = L_1 + L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos acima do segundo pivô

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$L'_1 = L_1 - 2L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada reduzida da matriz A

Exemplo 3

Use o método de Gauss-Jordan para resolver o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 4 \\ 2x + 5y + w = 7 \\ -x - y + 2z - w = -1 \\ 3x + 7y - z + w = 10 \end{cases}$$

Exemplo 3 – Matriz Aumentada

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 & 10 \end{array} \right]$$

Exemplo 3 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 & 10 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Eliminar os elementos abaixo do primeiro pivô} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = [2 \ 5 \ 0 \ 1 \mid 7] - 2[1 \ 2 \ -1 \ 1 \mid 4] = [0 \ 1 \ 2 \ -1 \mid -1]$$

$$L'_3 = L_3 + L_1 = [-1 \ -1 \ 2 \ -1 \mid -1] + [1 \ 2 \ -1 \ 1 \mid 4] = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \mid 3]$$

$$L'_4 = L_4 - 3L_1 = [3 \ 7 \ -1 \ 1 \mid 10] - 3[1 \ 2 \ -1 \ 1 \mid 4] = [0 \ 1 \ 2 \ -2 \mid -2]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

Exemplo 3 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do segundo pivô

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$L'_3 = L_3 - L_2 = \left[0 \ 1 \ 1 \ 0 \mid 3 \right] - \left[0 \ 1 \ 2 \ -1 \mid -1 \right] = \left[0 \ 0 \ -1 \ 1 \mid 4 \right]$$

$$L'_4 = L_4 - L_2 = \left[0 \ 1 \ 2 \ -2 \mid -2 \right] - \left[0 \ 1 \ 2 \ -1 \mid -1 \right] = \left[0 \ 0 \ 0 \ -1 \mid -1 \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

Exemplo 3 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

Transformar os pivôs em 1

$$L_3 \leftarrow -L_3$$

$$L_4 \leftarrow -L_4$$

$$L'_3 = -L_3 = -\left[0 \ 0 \ -1 \ 1 \mid 4 \right] = \left[0 \ 0 \ 1 \ -1 \mid -4 \right]$$

$$L'_4 = -L_4 = -\left[0 \ 0 \ 0 \ -1 \mid -1 \right] = \left[0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 1 \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 3 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos acima do quarto pivô

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_4$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_4$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_4$$

$$L'_3 = L_3 + L_4 = \left[0 \ 0 \ 1 \ -1 \mid -4 \right] + \left[0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 1 \right] = \left[0 \ 0 \ 1 \ 0 \mid -3 \right]$$

$$L'_2 = L_2 + L_4 = \left[0 \ 1 \ 2 \ -1 \mid -1 \right] + \left[0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 1 \right] = \left[0 \ 1 \ 2 \ 0 \mid 0 \right]$$

$$L'_1 = L_1 - L_4 = \left[1 \ 2 \ -1 \ 1 \mid 4 \right] - \left[0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 1 \right] = \left[1 \ 2 \ -1 \ 0 \mid 3 \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 3 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos acima do terceiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_3 = \left[0 \ 1 \ 2 \ 0 \mid 0 \right] - 2 \left[0 \ 0 \ 1 \ 0 \mid -3 \right] = \left[0 \ 1 \ 0 \ 0 \mid 6 \right]$$

$$L'_1 = L_1 + L_3 = \left[1 \ 2 \ -1 \ 0 \mid 3 \right] + \left[0 \ 0 \ 1 \ 0 \mid -3 \right] = \left[1 \ 2 \ 0 \ 0 \mid 0 \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 3 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos acima do segundo pivô

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$L'_1 = L_1 - 2L_2 = \left[1 \ 2 \ 0 \ 0 \mid 0 \right] - 2 \left[0 \ 1 \ 0 \ 0 \mid 6 \right] = \left[1 \ 0 \ 0 \ 0 \mid -12 \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 3 – Solução

A solução do sistema é $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 4

Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x + 2y - z + w + v = 3 \\ 2x + 5y + z + 2w + v = 8 \\ -x - y + 2z - w + 2v = -1 \\ y + z + 3v = 2 \end{cases}$$

Exemplo 4 – Matriz Aumentada

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

Exemplo 4 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$L'_2 = \left[2 \ 5 \ 1 \ 2 \ 1 \mid 8 \right] - 2 \left[1 \ 2 \ -1 \ 1 \ 1 \mid 3 \right] = \left[0 \ 1 \ 3 \ 0 \ -1 \mid 2 \right]$$

$$L'_3 = \left[-1 \ -1 \ 2 \ -1 \ 2 \mid -1 \right] + \left[1 \ 2 \ -1 \ 1 \ 1 \mid 3 \right] = \left[0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 3 \mid 2 \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

Exemplo 4 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do segundo pivô

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$L'_3 = \left[0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 3 \mid 2 \right] - \left[0 \ 1 \ 3 \ 0 \ -1 \mid 2 \right] = \left[0 \ 0 \ -2 \ 0 \ 4 \mid 0 \right]$$

$$L'_4 = \left[0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 3 \mid 2 \right] - \left[0 \ 1 \ 3 \ 0 \ -1 \mid 2 \right] = \left[0 \ 0 \ -2 \ 0 \ 4 \mid 0 \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Exemplo 4 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Tornar o terceiro pivô igual a 1

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$$

$$L'_3 = -\frac{1}{2} [0 \ 0 \ -2 \ 0 \ 4 \ | \ 0] = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -2 \ | \ 0]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Exemplo 4 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos abaixo do terceiro pivô

$$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$$

$$L'_4 = \left[0 \ 0 \ -2 \ 0 \ 4 \mid 0 \right] + 2 \left[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -2 \mid 0 \right] = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 0 \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Exemplo 4 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos acima do terceiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$L'_2 = \left[0 \ 1 \ 3 \ 0 \ -1 \mid 2 \right] - 3 \left[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -2 \mid 0 \right] = \left[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 5 \mid 2 \right]$$

$$L'_1 = \left[1 \ 2 \ -1 \ 1 \ 1 \mid 3 \right] + \left[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -2 \mid 0 \right] = \left[1 \ 2 \ 0 \ 1 \ -1 \mid 3 \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Exemplo 4 – Escalonamento do Sistema

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminar os elementos acima do segundo pivô

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$L'_1 = \left[1 \ 2 \ 0 \ 1 \ -1 \mid 3 \right] - 2 \left[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 5 \mid 2 \right] = \left[1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -11 \mid -1 \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Exemplo 4 – Sistema Linear Reduzido

$$\begin{cases} x & +w & -11v & = & -1 \\ & y & +5v & = & 2 \\ & & z & -2v & = & 0 \end{cases}$$

As incógnitas w e v não correspondem a pivôs
portanto são variáveis livres

$$w = s$$

$$v = t$$

para quaisquer valores reais t e s

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{cases} x & +w & -11v & = & -1 \\ & y & +5v & = & 2 \\ & & z & -2v & = & 0 \end{cases}$$

$$x = 11v - w - 1$$

$$y = 2 - 5v$$

$$z = 2v$$

$$x = 11t - s - 1$$

$$y = 2 - 5t$$

$$z = 2t$$

$$w = s$$

$$v = t$$

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$$