

# Sistemas Lineares Homogêneos

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

## Sistemas Lineares Homogêneos

# Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear **homogêneo** tem todos os **termos independentes iguais a zero**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases}$$

Na forma matricial

$$A_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{0}_{m \times 1}$$

# Existência de Solução

Todo sistema homogêneo possui pelo menos a **solução trivial**

$$\mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{0}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

pois

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

**Atenção:** As ordens das matrizes precisam ser compatíveis

# Soluções de um Sistema Homogêneo

Um sistema homogêneo pode possuir

- ▶ somente a solução trivial
- ▶ infinitas soluções

Qualquer solução  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  é chamada **solução não trivial**

# Exemplo 1

Determine as soluções do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

Matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

## Exemplo 1 – Escalonamento

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminamos os elementos abaixo do primeiro pivô  
 $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

$$L'_2 = L_2 - 3L_1 = \left[ \begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \end{array} \right] - 3 \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -7 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{array} \right]$$

# Exemplo 1 – Escalonamento

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Tornando o segundo pivô igual a 1} \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{7}L_2 \end{array}$$

$$L'_2 = -\frac{1}{7}L_2 = -\frac{1}{7} \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -7 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

## Exemplo 1 – Escalonamento

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminamos os elementos acima do segundo pivô

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$L'_1 = L_1 - 2L_2 = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \end{array} \right] - 2 \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Observe que a última coluna da matriz aumentada sempre ficou igual a zero

# Exemplo 1 – Solução

A única solução é

$$x = 0$$

$$y = 0$$

Vetorialmente

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Forma Escalonada e Soluções

Se todas as incógnitas correspondem a posições de pivô  
a única solução possível é a solução trivial

Se existir pelo menos uma variável livre  
podemos atribuir valores a essa variável e obter soluções não triviais

## Exemplo 2

Determine o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Basta escalonar a matriz  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 2 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L'_3 = L_3 - L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 2 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Trocamos as linhas  $L_2$  e  $L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 2 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tornando o segundo pivô igual a 1  
 $L_2 \leftarrow -L_2$

$$L'_2 = -L_2 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 2 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos acima do segundo pivô

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$L'_1 = L_1 - 2L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 2 – Solução

Sistema reduzido

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

A variável  $z$  é livre

$$z = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

## Exemplo 2 – Solução

Solução

$$x = -3t$$

$$y = 2t$$

Vetorialmente

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 2 – Conjunto Solução

O conjunto solução é

$$S = \left\{ t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

O conjunto solução forma uma reta que passa pela origem

## Exemplo 3

Determine o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 3 – Escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Eliminamos os elementos abaixo do primeiro pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 3 – Solução

Sistema reduzido

$$x + y + z + w = 0$$

$$x = -y - z - w$$

As variáveis  $y$ ,  $z$  e  $w$  são livres

$$y = r$$

$$\forall r \in \mathbb{R}$$

$$z = s$$

$$\forall s \in \mathbb{R}$$

$$w = t$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

$$x = -r - s - t$$

## Exemplo 3 – Solução

Vetorialmente

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -r - s - t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

com  $r, s, t \in \mathbb{R}$

## Exemplo 3 – Conjunto Solução

$$S = \left\{ r \mathbf{V}_1 + s \mathbf{V}_2 + t \mathbf{V}_3 \mid (r, s, t) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

com

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$