

Matrizes Inversas

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Matrizes Inversas

Calculando a Matriz Inversa

Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A

A é **invertível** quando existe uma matriz A^{-1}

tal que

$$AA^{-1} = I$$

$$A^{-1}A = I$$

I é a matriz identidade

Exemplo 1

Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

verifique se B é a matriz inversa de A

Exemplo 1 – Solução

Precisamos

1. Calcular o produto AB
2. Calcular o produto BA
3. Comparar os resultados obtidos com a matriz identidade I_3

Exemplo 1 – Cálculo de AB

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1 + 2 + 0 & -2 + 2 + 0 & 2 - 2 + 0 \\ 0 + 1 - 1 & 0 + 1 + 2 & 0 - 1 + 1 \\ 1 + 0 - 1 & -2 + 0 + 2 & 2 + 0 + 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Cálculo de AB

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1+2+0 & -2+2+0 & 2-2+0 \\ 0+1-1 & 0+1+2 & 0-1+1 \\ 1+0-1 & -2+0+2 & 2+0+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3I_3 \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Cálculo de BA

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 0 + 2 & 2 - 2 + 0 & 0 - 2 + 2 \\ 1 + 0 - 1 & 2 + 1 + 0 & 0 + 1 - 1 \\ -1 + 0 + 1 & -2 + 2 + 0 & 0 + 2 + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Cálculo de BA

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1+0+2 & 2-2+0 & 0-2+2 \\ 1+0-1 & 2+1+0 & 0+1-1 \\ -1+0+1 & -2+2+0 & 0+2+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3I_3 \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

Como

$$AB = 3I_3 \neq I_3$$

$$BA = 3I_3 \neq I_3$$

B não é a inversa de A

Exemplo 1 – Solução

Porém

$$A^{-1} = \frac{1}{3}B$$

pois

$$AA^{-1} = A\frac{1}{3}B = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}3I_3 = I_3$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{3}BA = \frac{1}{3}3I_3 = I_3$$

Conteúdo

Matrizes Inversas

Calculando a Matriz Inversa

Calculando a Matriz Inversa

Podemos calcular a matriz inversa usando o escalonamento de Gauss-Jordan

Começamos com a matriz aumentada com a identidade

$$[A \mid I]$$

Escalonamos A

O método transforma I em A^{-1}

Exemplo 2

Encontre a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 2 – Matriz Aumentada

Matriz aumentada $[A \mid I]$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Queremos transformar a parte da esquerda na identidade I_2

Exemplo 2 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Trocamos as linhas

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Exemplo 2 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminamos os elementos abaixo do primeiro pivô
 $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Exemplo 2 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Tornando o segundo pivô igual a 1} \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array}$$

$$L'_2 = -L_2 = -\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

Exemplo 2 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Eliminamos os elementos acima do segundo pivô} \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array}$$

$$L'_1 = L_1 - L_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

Exemplo 2 – Solução

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

Como a matriz tem posto completo

a inversa existe e pode ser lida do lado direito

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 – Verificação

Podemos verificar o resultado calculando

$$\begin{aligned}AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1(-1) & 2(-1) + 1 \times 2 \\ 1 \times 1 + 1(-1) & 1(-1) + 1 \times 2 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\&= I\end{aligned}$$

Portanto, a matriz encontrada é realmente a inversa de A

Exemplo 3

Encontre a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 3 – Matriz Aumentada

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 3 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Eliminamos os elementos acima do terceiro pivô} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$L'_2 = L_2 - L_3 = \left[0 \ 1 \ 1 \mid 0 \ 1 \ 0 \right] - \left[0 \ 0 \ 1 \mid 0 \ 0 \ 1 \right] = \left[0 \ 1 \ 0 \mid 0 \ 1 \ -1 \right]$$

$$L'_1 = L_1 - L_3 = \left[1 \ 1 \ 1 \mid 1 \ 0 \ 0 \right] - \left[0 \ 0 \ 1 \mid 0 \ 0 \ 1 \right] = \left[1 \ 1 \ 0 \mid 1 \ 0 \ -1 \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 3 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Eliminamos os elementos acima do terceiro pivô} \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array}$$

$$L'_1 = L_1 - L_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 3 – Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Como a matriz tem posto completo

A inversa existe e pode ser lida do lado direito

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4

Tente calcular a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exemplo 4 – Matriz Aumentada

Matriz aumentada $[A \mid I]$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Queremos transformar a parte da esquerda na identidade I_2

Exemplo 4 – Escalonamento

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Eliminamos os elementos abaixo do primeiro pivô
 $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$L'_2 = L_2 - 2L_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 4 – Solução

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

O escalonamento da matriz A produziu uma linha nula

A matriz A não tem posto completo

A matriz A é singular

A matriz A não possui inversa

Conexão Importante

Para uma matriz quadrada A_n é equivalente

- ▶ A é invertível
- ▶ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ possui somente a solução trivial
- ▶ $\text{posto}(A) = n$

Inversa e Sistemas Lineares

Dado

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Se A é invertível, podemos multiplicar os dois lados por A^{-1}

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$I\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Exemplo 5

Resolva o sistema linear utilizando a inversa

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Exemplo 5 – Forma Matricial

Na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Inversa de A

Do exercício anterior

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 5 + (-1)3 \\ (-1)5 + 2 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ -5 + 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$x = 2 \qquad y = 1$$

Exemplo 6

Exemplo 6 – Solução

Propriedades da matriz inversa

Se A e B são matrizes invertíveis de mesma ordem

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$I^{-1} = I$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1} \quad \text{para um escalar } \lambda \neq 0$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Matriz Singular

Uma matriz quadrada A que não possui inversa é **singular**

Nesse caso

$$\text{posto}(A) < n$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ possui uma solução não trivial