

Determinantes

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Determinantes

Definição

Teorema de Laplace

Regra de Sarrus

Determinantes

O determinante é uma função que associa um número real a uma matriz quadrada

Para uma matriz quadrada A , o determinante é denotado por

$$\det(A)$$

outra notação para o determinante é colocar os elementos entre linhas verticais

$$\det(A) = |A|$$

Determinantes

O determinante possui aplicações importantes

- ▶ verificar se uma matriz é invertível
- ▶ analisar sistemas lineares
- ▶ determinar dependência linear
- ▶ calcular áreas e volumes
- ▶ estudar transformações lineares

Conteúdo

Determinantes

Definição

Teorema de Laplace

Regra de Sarrus

Determinante de uma matriz 1×1

Para uma matriz de ordem 1

$$A = (a_{11})$$

definimos

$$\det(A) = a_{11}$$

Determinante de uma matriz 2×2

O determinante da matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é o produto dos elementos da **diagonal menos**

o produto dos elementos da **diagonal secundária** (invertida)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemplo 1

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= 3 \times 4 - 2 \times 1 \\ &= 12 - 2 \\ &= 10\end{aligned}$$

Determinante de uma matrizes $n \times n$

Para definir determinantes de matrizes de ordem maior

Precisamos definir operações conceitos intermediários

- ▶ Menor complementar
- ▶ Cofator

para apresentarmos o [Teorema de Laplace](#)

Menor complementar

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem n

O **menor complementar** M_{ij} é o determinante da matriz obtida eliminando a linha i e a coluna j de A

Exemplo 2

Determine o menor complementar associado ao elemento a_{12} da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

Obtemos o menor complementar eliminando a primeira linha e a segunda coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4 \times 9 - 6 \times 7 = -7$$

Cofator

O **cofator** associado ao elemento a_{ij} é definido por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Isto é

$$C_{ij} = M_{ij} \quad \text{quando } i + j \text{ é par}$$

$$C_{ij} = -M_{ij} \quad \text{quando } i + j \text{ é ímpar}$$

Exemplo 3

Determine o cofator associado ao elemento a_{12} da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}C_{12} &= (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12} = -\det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \\ &= -(4 \times 9 - 6 \times 7) = 7\end{aligned}$$

Conteúdo

Determinantes

Definição

Teorema de Laplace

Regra de Sarrus

Teorema de Laplace

Teorema de Laplace

permite calcular o determinante de uma matriz quadrada
expandindo-o por qualquer linha ou qualquer coluna

A escolha da linha ou coluna é livre

Teorema de Laplace – Expansão por Linha

Expandindo pela linha i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Teorema de Laplace – Expansão por Coluna

Expandindo pela coluna j

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Exemplo 4

Calcule o determinante da matriz usando Teorema de Laplace

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Podemos expandir o determinante por linha ou coluna

Escolhendo a primeira **coluna** temos mais elementos nulos

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^3 a_{i1} C_{i1} = a_{11} C_{11} + a_{21} C_{21} + a_{31} C_{31} \\ &= 1 C_{11} + 0 C_{21} + 0 C_{31} \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= 1 C_{11} + 0 C_{21} + 0 C_{31} \\ &= C_{11} \\ &= (-1)^{1+1}M_{11} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times 7 - 5 \times 6 = 28 - 30 = -2\end{aligned}$$

Exemplo 5

Calcule o determinante da matriz usando Teorema de Laplace

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A segunda linha contém um zero

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^3 a_{2j} C_{2j} = a_{21} C_{21} + a_{22} C_{22} + a_{23} C_{23} \\ &= 3 C_{21} + 4 C_{22} + 0 C_{23} \\ &= 3 C_{21} + 4 C_{22} \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Calculando os Cofatores

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$$

$$= -M_{21}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -(0 \times 5 - 1 \times 2)$$

$$= 2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}$$

$$= M_{22}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 5 - 1 \times 1$$

$$= 9$$

Exemplo 5 – Calculando os Cofatores

$$\det(A) = 3 C_{21} + 4 C_{22}$$

$$= 3 \times 2 + 4 \times 9$$

$$= 6 + 36$$

$$= 42$$

Conteúdo

Determinantes

Definição

Teorema de Laplace

Regra de Sarrus

Regra de Sarrus

APENAS para matrizes 3×3

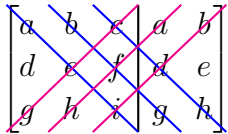
existe um procedimento conhecido como Regra de Sarrus

Para

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Diagrama da Regra de Sarrus



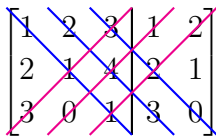
$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Exemplo 6

Calcule o determinante da matriz pela Regra de Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Solução


$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 4 \times 3 + 3 \times 2 \times 0 - 3 \times 1 \times 3 - 2 \times 2 \times 1 - 1 \times 4 \times 0 \\ &= 1 + 24 + 0 - 9 - 4 - 0 \\ &= 25 - 13 \\ &= 12 \end{aligned}$$