

Determinantes e Sistemas Lineares

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Determinantes e Sistemas Lineares

Regra de Cramer

Determinantes e Sistemas Lineares

O determinante de A

permite responder questões sobre o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- ▶ O sistema possui solução?
- ▶ A solução é única?
- ▶ Existem infinitas soluções?
- ▶ O sistema homogêneo possui soluções não triviais?

Relação Fundamental

Relação fundamental

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ é invertível}$$

Se $\det(A) \neq 0$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \text{solução única}$$

Classificação de sistemas

Um sistema linear quadrado $Ax = b$ pode ser

- ▶ possível e determinado
- ▶ possível e indeterminado
- ▶ impossível

Se $\det(A) \neq 0$ o sistema é necessariamente possível e determinado

Se $\det(A) = 0$ o sistema pode ser possível e indeterminado ou impossível

Exemplo 1

Utilize o determinantes para verificar se o sistema possui solução única

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Exemplo 1 – Solução

Matriz dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinante

$$\det(A) = 2(-1) - 1(1) = -3 \neq 0$$

o sistema possui uma única solução

Conteúdo

Determinantes e Sistemas Lineares

Regra de Cramer

Regra de Cramer

Dado o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

com A é quadrada e $\det(A) \neq 0$

A [Regra de Cramer](#) fornece a solução do sistema por determinantes

Regra de Cramer para Sistemas 2×2

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y = b_1 \\ a_{21} x + a_{22} y = b_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} \qquad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}$$

A_x e A_y são obtidas substituindo a coluna correspondente por b

$$A_x = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A_y = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2

Resolva o sistema pela Regra de Cramer

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2(-1) - 1 \times 1 \\ &= -2 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Determinando x

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_x = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_x) = 5(-1) - 1(1) = -6$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Exemplo 2 – Determinando x

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_y) = 2 \times 1 - 5 \times 1 = -3$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-3}{-3} = 1$$

Regra de Cramer para Sistemas 3×3

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Se $\det(A) \neq 0$ então

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}$$

Exemplo 3

Resolva pelo Método de Cramer

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Pela Regra de Sarrus

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1(-1)(-1) + 1(1)(1) + 1(2)(2) - 1(-1)(1) - 1(2)(-1) - 1(1)(2) \\ &= 1 + 1 + 4 + 1 + 2 - 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Como $\det(A) \neq 0$ o sistema possui uma única solução

Exemplo 3 – Cálculo do Determinante de A_x

$$A_x = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_x) &= 6(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6[(-1)(-1) - 1 \times 2] - [3(-1) - 1 \times 2] + [3 \times 2 - (-1)2] \\ &= -6 + 5 + 8 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Cálculo do Determinante de A_y

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_y) &= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 6(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1[3(-1) - 1 \times 2] - 6[2(-1) - 1 \times 1] + [2 \times 2 - 3 \times 1] \\ &= -5 + 18 + 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Cálculo do Determinante de A_z

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_z) &= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 6(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1[(-1)2 - 3 \times 2] - [2 \times 2 - 3 \times 1] + 6[2 \times 2 - (-1)1] \\ &= -8 - 1 + 30 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{14}{7} = 2$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{21}{7} = 3$$