

Norma de um Vetor

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Norma de um Vetor

Vetor Unitário

Norma de um Vetor

Norma, Comprimento ou Módulo do vetor

é o comprimento do segmento orientado

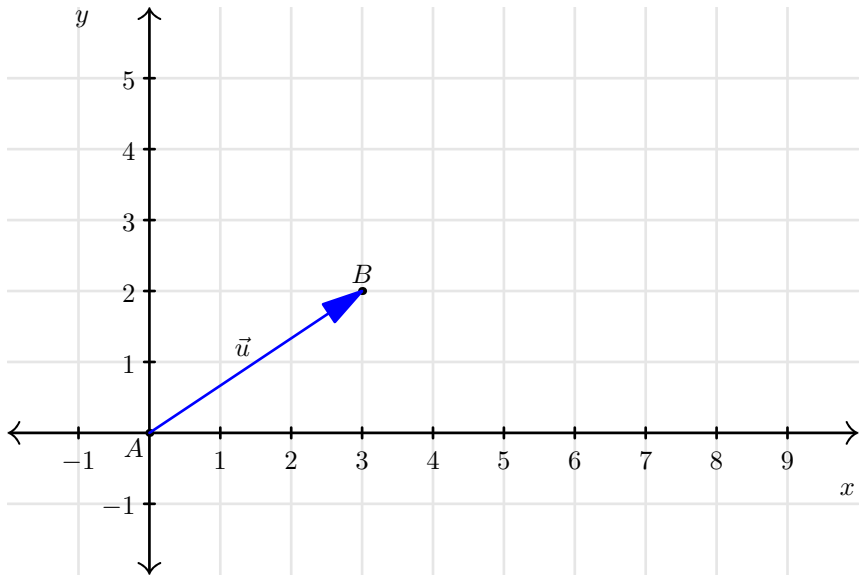
$$\|\vec{u}\| = |\vec{u}| = \left| \overrightarrow{AB} \right|$$

Direção e sentido não interferem na norma

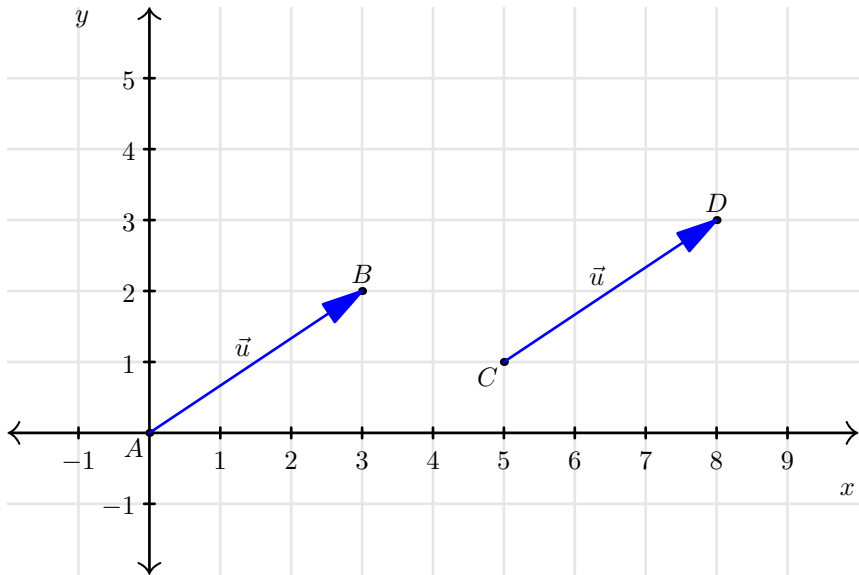
A norma é uma grandeza escalar (número real) não negativa

$$\|\vec{u}\| \in \mathbb{R} \qquad \|\vec{u}\| \geq 0$$

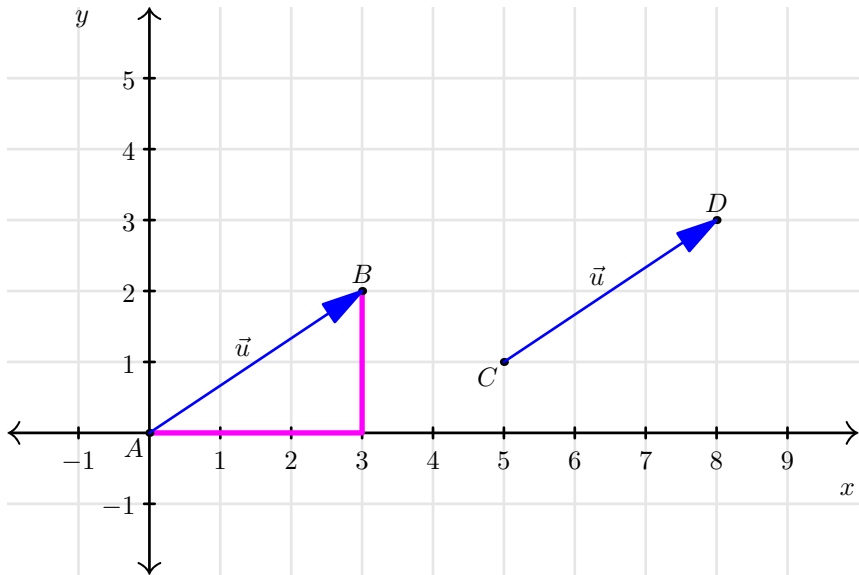
Interpretação Geométrica



Interpretação Geométrica



Interpretação Geométrica



Cálculo da Norma

Para um vetor no plano $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{u} = (u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Pitágoras

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Cálculo da Norma

Para um vetor no espaço $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Pitágoras

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Cálculo da Norma

De forma geral, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Pitágoras

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

Exemplo 1

Determine o módulo do vetor $\vec{u} = (6, 8)$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10\end{aligned}$$

Propriedades da Norma

Para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesma dimensão

$$\|\vec{u}\| \geq 0$$

$$\|\vec{u}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{0}$$

$$\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad \text{desigualdade triangular}$$

Relação Entre Norma e Produto por Escalar

O norma do produto por escalar satisfaz

$$\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$$

Exemplo 2

Determine o valor de k para que o vetor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix}$$

possua módulo igual a 5

Exemplo 2 – Solução

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{k^2 + 16} = 5$$

$$k^2 + 16 = 25$$

$$k^2 = 25 - 16$$

$$k^2 = 9$$

$$|k| = 3$$

$$k = \pm 3$$

$$k = 3 \quad \text{ou} \quad k = -3$$

Exemplo 3

Dados

$$\vec{u} = (3, 4)$$

$$\vec{v} = (4, -3)$$

Determine o módulo da soma dos vetores

Exemplo 3 – Solução

Calculando a Soma

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (3, 4) + (4, -3) \\ &= (3 + 4, 4 - 3) \\ &= (7, 1)\end{aligned}$$

Calculando o módulo

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\| &= \|(7, 1)\| \\ &= \sqrt{7^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

Conteúdo

Norma de um Vetor

Vetor Unitário

Vetor Unitário

Um **vetor unitário** tem norma igual a 1

Dado um vetor $\vec{v}$

podemos criar um vetor unitário com mesma direção e sentido
dividindo $\vec{v}$ pela sua norma

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Exemplo 4

Encontre o vetor unitário na mesma direção e sentido do vetor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Solução

Norma do vetor $\vec{u}$

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 9 + 4} \\ &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

Vetor unitário

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

Exemplo 5

Avalie $\|\vec{u} + 2\vec{v}\|$ para

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$2\vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 \\ 2(-1) \\ 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u} + 2\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 49 + 1} = \sqrt{66}$$

Exemplo 6

Dados $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Determine λ de modo que $\left\| 2\vec{u} + \vec{v} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 3$

Exemplo 6 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} &= 2\vec{u} + \vec{v} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - 4 + \lambda \\ -2 + 3 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\|\vec{w}\| = \left\| \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 3$$

$$\sqrt{\lambda^2 + 2^2} = 3$$

$$\lambda^2 + 4 = 3^2$$

$$\lambda^2 = 9 - 4$$

$$\lambda^2 = 5$$

$$|\lambda| = \sqrt{5}$$

$$\lambda = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad \lambda = -\sqrt{5}$$