

# Produto Escalar

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

# Conteúdo

Produto escalar

Fórmula Alternativa

# Produto escalar

Dados os vetores  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  em  $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

O **produto escalar** ou **produto interno** de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  é

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{i=1}^n u_iv_i$$

O resultado do produto escalar é um número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$

# Exemplo 1

Calcule o produto escalar dos vetores

$$\vec{w} = (2, 3) \qquad \vec{v} = (4, -1)$$

## Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (2, 3) \cdot (4, -1) \\ &= 2 \times 4 + 3(-1) \\ &= 8 - 3 \\ &= 5\end{aligned}$$

## Exemplo 2

Calcule o produto escalar dos vetores

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times 4 + (-2)0 + 3(-1) \\ &= 4 + 0 - 3 \\ &= 1\end{aligned}$$

# Calculando a Norma pelo Produto Escalar

Dado um vetor  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

Calculamos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + \dots + u_n^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

Comparando temos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

# Morma como Consequência do Produto Escalar

A relação

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

mostra que o produto escalar **determina** a norma

## Exemplo 3

Calcule sua norma do vetor utilizando o produto escalar

$$\vec{u} = (2, -3, 6, -1)$$

## Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= (2, -3, 6, -1) \cdot (2, -3, 6, -1) \\ &= 2^2 + (-3)^2 + 6^2 + (-1)^2 \\ &= 4 + 9 + 36 + 1 \\ &= 50\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

# Propriedades do produto escalar

Para vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e escalare  $\lambda$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

# Conteúdo

Produto escalar

Fórmula Alternativa

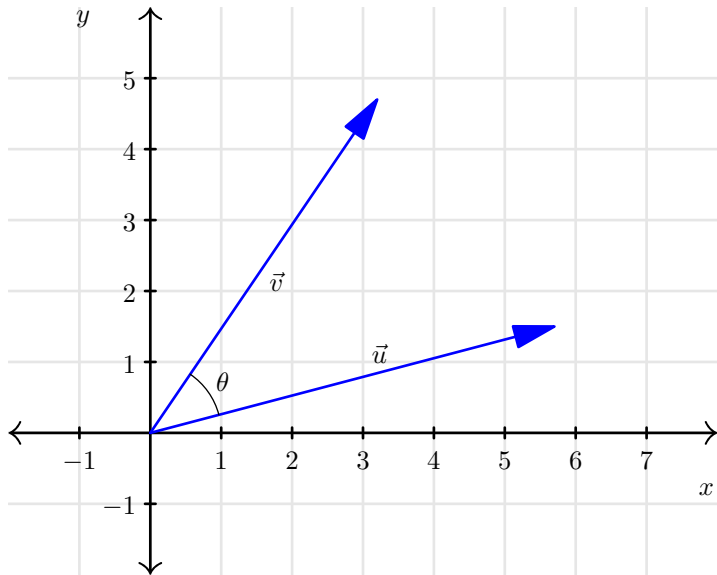
# Fórmula Alternativa

Dados vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  com a mesma origem

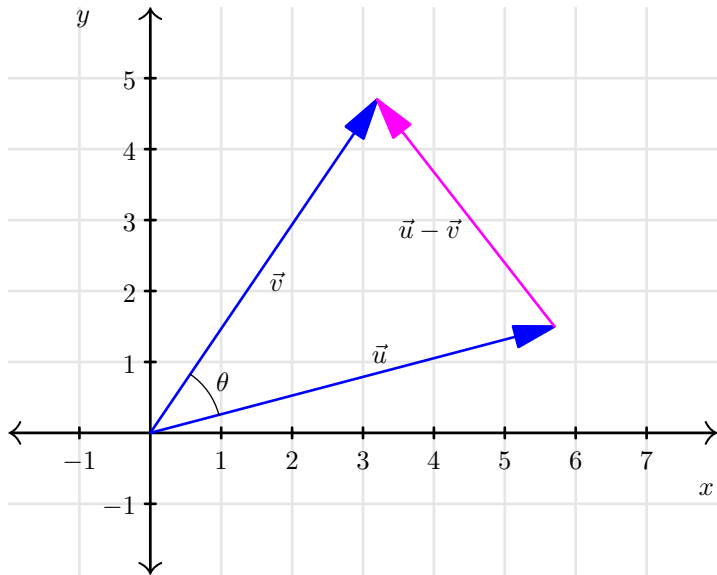
Seja  $\theta$  o ângulo entre eles

Queremos relacionar as componentes dos vetores com o ângulo  $\theta$

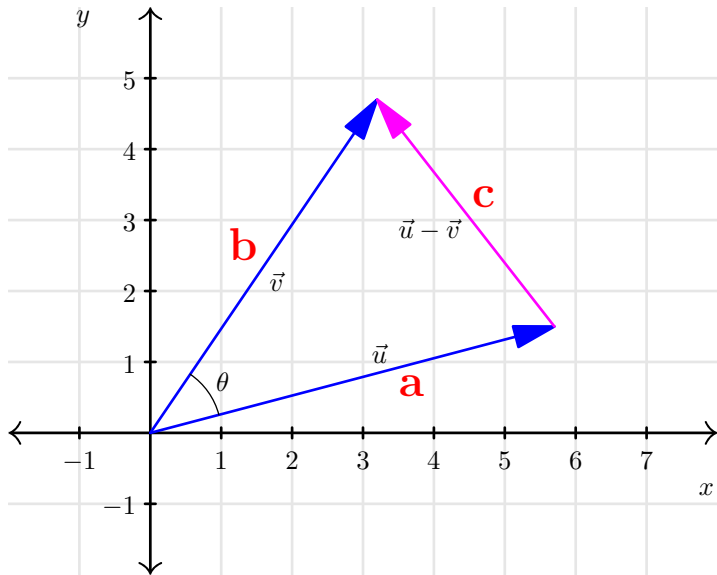
# Formula Alternativa



# Formula Alternativa



# Formula Alternativa



# Lei dos cossenos

Lei dos cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

No triângulo

$$a = \|\vec{u}\| \qquad b = \|\vec{v}\| \qquad c = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Portanto

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

# Fórmula Alternativa

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

$$2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

# Significado Geométrico

A fórmula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

mostra que o produto escalar depende

- ▶ do comprimento de  $\vec{u}$
- ▶ do comprimento de  $\vec{v}$
- ▶ do ângulo entre os vetores

# Significado Geométrico

Como  $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$  temos

$$-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$