

Projeção Ortogonal

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Decomposição de Vetores

Projeção Ortogonal

Distância

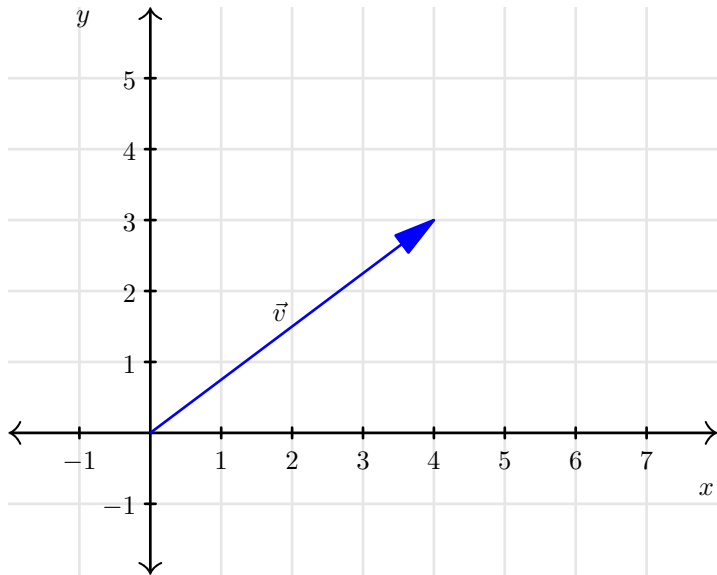
Decomposição de Vetores

Pode ser conveniente decompor o vetor em uma soma de vetores

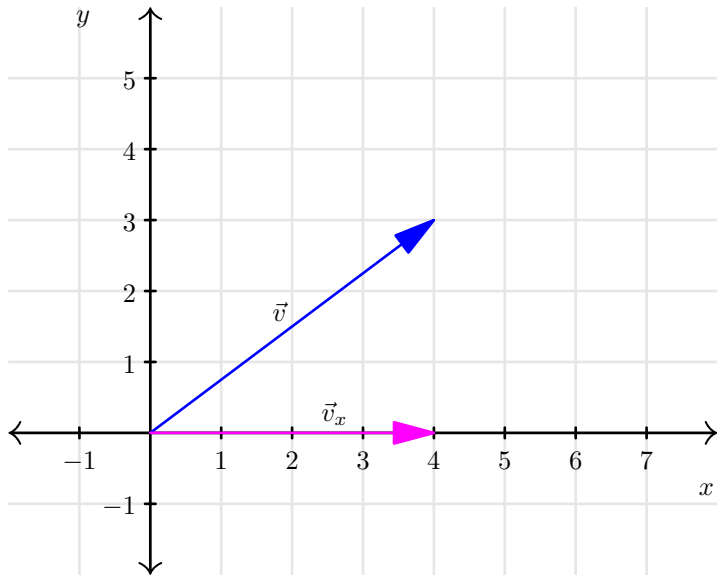
Por exemplo,

Podemos decompor qualquer vetor em vetores alinhados com os eixos do $\mathbb{R}^n$

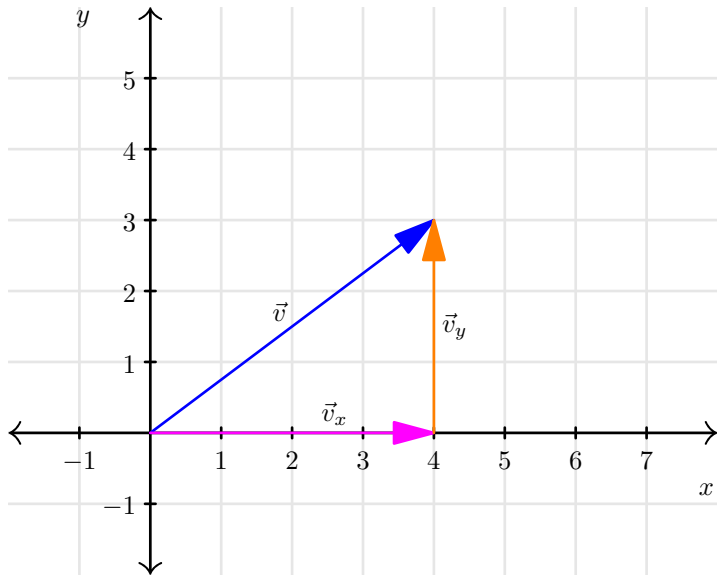
Decomposição de Vetores



Decomposição de Vetores



Decomposição de Vetores

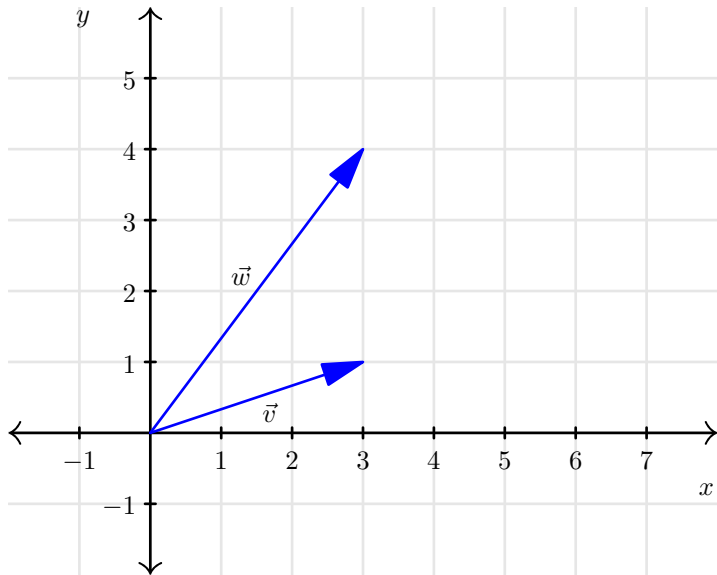


Decomposição de Vetores

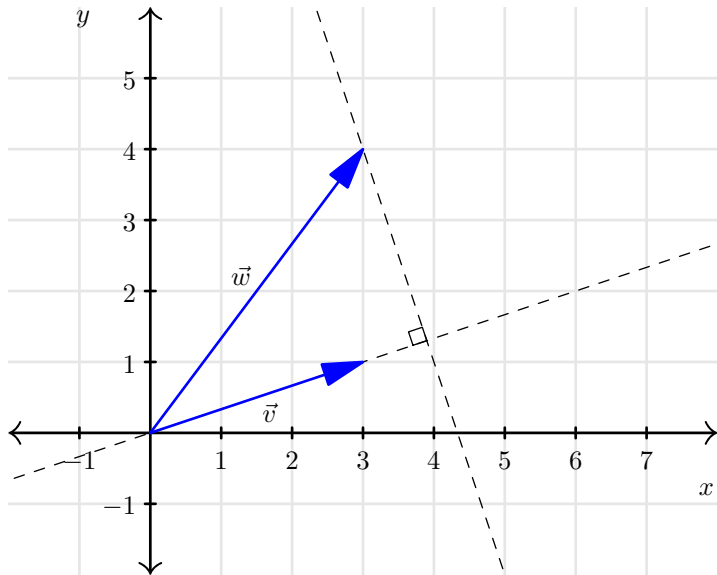
Muitas vezes precisamos decompor um vetor na direção de outro

Para isso precisamos da **projeção ortogonal** de um vetor em outro

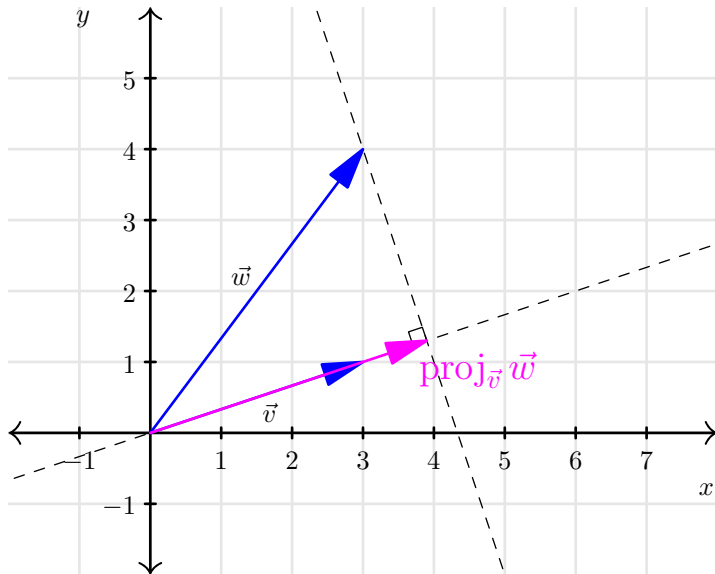
Decomposição Ortogonal



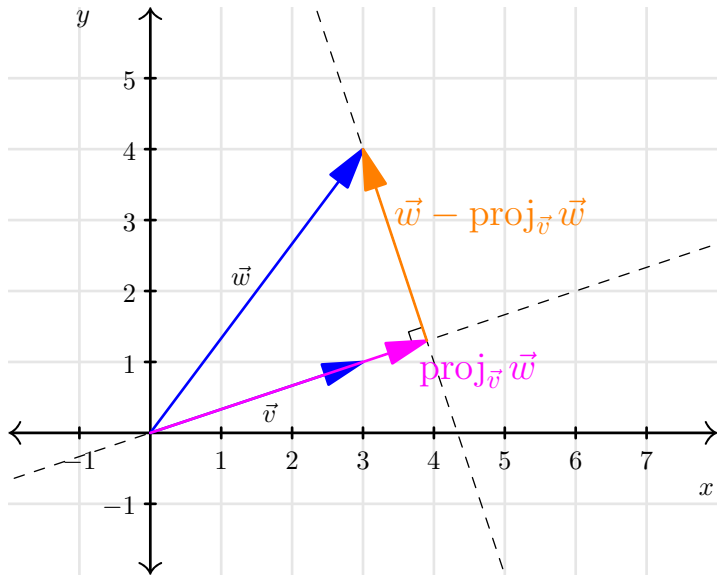
Decomposição Ortogonal



Decomposição Ortogonal



Decomposição Ortogonal



Conteúdo

Decomposição de Vetores

Projeção Ortogonal

Distância

Projeção ortogonal

Considere os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$

Queremos determinar a componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$

A **projeção ortogonal** de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

é o vetor paralelo a $\vec{v}$

obtido ao projetar ortogonalmente $\vec{w}$

sobre a reta determinada por $\vec{v}$

Projeção Vetorial

Se θ é o ângulo entre $\vec{w}$ e $\vec{v}$

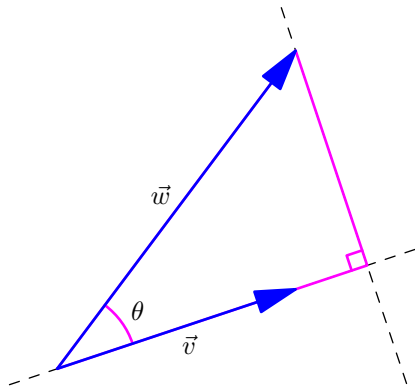
A componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$
possui comprimento

$$\|\vec{w}\| \cos(\theta)$$

Do produto escalar temos

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{w}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

$$\|\vec{w}\| \cos(\theta) = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$



Projeção Vetorial

Queremos agora um vetor na direção de $\vec{v}$, com comprimento $\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Portanto

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

desde que $\vec{v} \neq \vec{0}$

Projeção Vetorial

Projeção do vetor $\vec{w}$ na direção do vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 1

Dados

$$\vec{w} = (3, 4) \quad \vec{v} = (1, 0)$$

Calcule a projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

Exemplo 1 – Solução

Queremos a projeção de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (1, 0)$$

$$= 3 \times 1 + 4 \times 0$$

$$= 3$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{3}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (1, 0) \cdot (1, 0)$$

$$= 1 \times 1 + 0 \times 0$$

$$= 1$$

Exemplo 2

Dados

$$\vec{w} = (3, 4) \quad \vec{v} = (2, 1)$$

Calcule a projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

Exemplo 2 – Solução

Queremos a projeção de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (2, 1)$$

$$= 3 \times 2 + 4 \times 1$$

$$= 6 + 4$$

$$= 10$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (2, 1) \cdot (2, 1)$$

$$= 2^2 + 1^2$$

$$= 4 + 1$$

$$= 5$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{10}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3

Dados

$$\vec{w} = (3, 4) \quad \vec{v} = (2, 1)$$

Calcule a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$

Atenção à ordem dos vetores

Exemplo 3 – Solução

Queremos a projeção de $\vec{v}$ em $\vec{w}$

$$\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = (3, 4) \cdot (3, 4)$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

$$\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{10}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Decomposição Ortogonal

Um vetor $\vec{w}$ pode ser decomposto em duas componentes

$$\vec{w} = \vec{w}_{//} + \vec{w}_{\perp}$$

onde

$$\vec{w}_{//} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

$\vec{w}_{//}$ é paralelo a $\vec{v}$

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \vec{w}_{//}$$

$\vec{w}_{\perp}$ é ortogonal a $\vec{v}$

Exemplo 4

Dados

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determine a componente de $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{v}$

Exemplo 4 – Solução

Queremos a **componente perpendicular** de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \vec{w} - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Componente Perpendicular

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\perp} &= \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{9}{5} \\ 2 - \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 \times 5}{5} - \frac{9}{5} \\ \frac{2 \times 5}{5} - \frac{18}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{25 - 9}{5} \\ \frac{10 - 18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{-8}{5} \end{pmatrix} = -\frac{8}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 5

Dados

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determine

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 + 4 = 9\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{6}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 6

Dados

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determine a decomposição

$$\vec{w} = \vec{w}_{//} + \vec{w}_{\perp}$$

Exemplo 6 – Solução

Do exercício anterior temos

$$\vec{w}_{//} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\perp} &= \vec{w} - \vec{w}_{//} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{3} \\ -1 - \frac{4}{3} \\ 3 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6-2}{3} \\ \frac{-3-4}{3} \\ \frac{9-4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 7

Determine a projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

$$\vec{w} = (1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\vec{v} = (2, 0, 1, -1, 2)$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4(-1) + 5 \times 2 \\ &= 2 + 0 + 3 - 4 + 10 = 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (2, 0, 1, -1, 2) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 2^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2^2 \\ &= 4 + 0 + 1 + 1 + 4 = 10\end{aligned}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} &= \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} \\ &= \frac{11}{10} (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= \left(\frac{11}{5}, 0, \frac{11}{10}, -\frac{11}{10}, \frac{11}{5} \right)\end{aligned}$$

Exemplo 8

Uma força é representada pelo vetor

$$\vec{F} = (6, -2, 3)$$

e atua sobre um objeto que se desloca na direção

$$\vec{d} = (2, 1, 2)$$

Determine as componentes da força paralela e perpendicular à direção $\vec{d}$

Exemplo 8 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 6 \times 2 + (-2)1 + 3 \times 2 \\ &= 12 - 2 + 6 \\ &= 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{d} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2^2 + 1^2 + 2^2 \\ &= 4 + 1 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\text{proj}_{\vec{d}} \vec{F} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \vec{d} = \frac{16}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16 \times 2}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{16 \times 2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{32}{9} \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Solução

A componente paralela da força é

$$\vec{F}_{//} = \text{proj}_{\vec{d}} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{32}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{32}{9} \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Solução

A componente perpendicular é

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{//} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{32}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{32}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6 \times 9 - 32}{9} \\ \frac{-2 \times 9 - 16}{9} \\ \frac{3 \times 9 - 32}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{9} \\ -\frac{34}{9} \\ -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Conteúdo

Decomposição de Vetores

Projeção Ortogonal

Distância

Projeção e Distância

A componente perpendicular da decomposição

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

é ortogonal a $\vec{v}$

Sua norma é a distância entre o ponto, P , final de $\vec{u}$

e a reta, r , que contém o vetor $\vec{v}$

$$\text{dist}(P, r) = \|\vec{w}_{\perp}\| = \|\vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}\|$$

Exemplo 9

Determine a distância entre a extremidade de

$$\vec{w} = (3, 4)$$

e a reta determinada por

$$\vec{v} = (1, 2)$$

Exemplo 9 – Solução

A distância é a norma da componente perpendicular da projeção de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

$$\text{dist} = \|w_{\perp}\| = \|w - w_{\parallel}\| = \|w - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}\|$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 2) \cdot (1, 2) \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Componente Perpendicular

$$\begin{aligned} w_{\perp} &= w - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \times 5 - 7}{5} \\ \frac{4 \times 10 - 7}{10} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{15 - 7}{5} \\ \frac{40 - 7}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{33}{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 9 – Distância

$$\text{dist} = \|w_{\perp}\| = \|w - w_{//}\| = \|w - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}\|$$