

Produto Vetorial

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Introdução

Definição

Produto Vetorial em $\mathbb{R}^2$

Norma do Produto Vetorial

Produto Vetorial

Apenas para vetores em $\mathbb{R}^3$

é possível definir uma operação de produto entre vetores

que produz um novo vetor ortogonal a ambos os vetores originais

Produto Vetorial

Dados dois vetores não nulos

$$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

O **produto escalar** produz um número

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

O **produto vetorial** produz um vetor ortogonal aos dois vetores

$$\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

Não misture as notações: $\cdot$ $\times$

Definição Geométrica

Considere dois vetores com a mesma origem

$$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

O produto vetorial $\vec{v} \times \vec{w}$

- ▶ é ortogonal a $\vec{v}$
- ▶ é ortogonal a $\vec{w}$
- ▶ seu sentido é determinado pela regra da mão direita

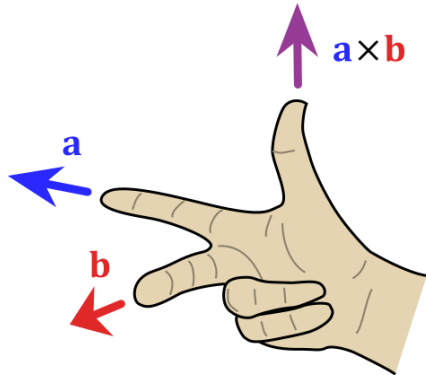
Regra da Mão Direita

O sentido do produto vetorial é determinado pela regra da mão direita

- ▶ aponte o dedo indicador na direção de $\vec{v}$
- ▶ aponte o dedo médio na direção a $\vec{w}$
- ▶ o polegar indica a direção de $\vec{v} \times \vec{w}$

A ordem dos vetores é importante

$$\vec{v} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v})$$



Conteúdo

Introdução

Definição

Produto Vetorial em $\mathbb{R}^2$

Norma do Produto Vetorial

Definição Algébrica

$$\text{Dados} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

O produto vetorial é definido por

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Representação Alternativa

Definindo os vetores $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Temos

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \vec{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{k}$$

Forma por Determinante

Cálculo pelo determinante

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Expandindo pela primeira linha

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Lembre-se do Teorema de Laplace – [Atenção aos sinais](#)

Exemplo 1

Calcule o produto escalar e o produto vetorial do vetor $\vec{v}$ por $\vec{w}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Produto Escalar

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times 2 + 2(-1) + 3 \times 1 \\ &= 2 - 2 + 3 \\ &= 3\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Produto Vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\&= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\&= (2 \times 1 - 3(-1))\vec{i} - (1 \times 1 - 3 \times 2)\vec{j} + (1(-1) - 2 \times 2)\vec{k} \\&= 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Conteúdo

Introdução

Definição

Produto Vetorial em $\mathbb{R}^2$

Norma do Produto Vetorial

Produto Vetorial em $\mathbb{R}^2$

O produto vetorial só é definido em $\mathbb{R}^3$

Porém, para vetores do plano

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

consideramos suas versões em $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2

Dados os vetores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calcule $\vec{v} \times \vec{w}$ e $\vec{w} \times \vec{v}$

Exemplo 2 – Produto Vetorial $\vec{v} \times \vec{w}$

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-1(-2) - 4 \times 3) \vec{i} - (2(-2) - 4 \times 1) \vec{j} + (2 \times 3 - (-1)1) \vec{k} \\ &= -10\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Produto Vetorial $\vec{w} \times \vec{v}$

$$\begin{aligned}\vec{w} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (3 \times 4 - (-2)(-1))\vec{i} - (1 \times 4 - (-2)2)\vec{j} + (1(-1) - 3 \times 2)\vec{k} \\ &= 10\vec{i} - 8\vec{j} - 7\vec{k} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule o produto vetorial

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Em seguida verifique que o resultado é ortogonal aos dois vetores

Exemplo 3 – Produto Vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2 \times 3 - (-1)(-1))\vec{i} - (1 \times 3 - (-1)2)\vec{j} + (1(-1) - 2 \times 2)\vec{k} \\ &= 5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Verificando a Ortogonalidade

$$\begin{aligned}\vec{\psi} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + (-5)2 + (-5)(-1) \\ &= 5 - 10 + 5 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\vec{\psi}$ e $\vec{v}$ são ortogonais

$$\begin{aligned}\vec{\psi} \cdot \vec{w} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 2 + (-5)(-1) + (-5)3 \\ &= 10 + 5 - 15 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\vec{\psi}$ e $\vec{w}$ são ortogonais

Exemplo 4

Determine um vetor unitário ortogonal aos vetores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Usamos o produto vetorial para encontrar um vetor ortogonal e dividimos ele por sua norma para encontrar um vetor unitário

Exemplo 4 – Produto Vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= ((-1)2 - 1 \times 3) \vec{i} - (2 \times 2 - 1(-1)) \vec{j} + (2 \times 3 - (-1)(-1)) \vec{k} \\ &= -5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Vetor Unitário

Norma de $\vec{\psi}$

$$\begin{aligned}\|\vec{\psi}\| &= \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{3 \times 5^2} \\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

Vetor unitário da direção e sentido de $\vec{\psi}$

$$\begin{aligned}\hat{\psi} &= \frac{\vec{\psi}}{\|\vec{\psi}\|} = \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 5

Determine todos os vetores simultaneamente perpendiculares a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e que possuem módulo 10

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Produto Vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2 \times 1 - 3(-1))\vec{i} - (1 \times 1 - 3 \times 2)\vec{j} + (1(-1) - 2 \times 2)\vec{k} \\ &= 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Vetor Unitário

Norma de $\vec{\psi}$

$$\begin{aligned}\|\vec{\psi}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{5^2 + 5^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{3 \times 5^2} \\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

Vetor unitário da direção e sentido de $\vec{\psi}$

$$\begin{aligned}\hat{\psi} &= \frac{\vec{\psi}}{\|\vec{\psi}\|} = \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Vetores com Módulo 10

Temos dois vetores na direção de $\vec{\psi}$
que são ortogonais a $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\vec{a} = 10\hat{\psi}$$

$$\vec{b} = -10\hat{\psi}$$

Exemplo 5 – Vetores com Módulo 10

$$\vec{a} = 10\hat{\psi} = 10 \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{59}} \\ \frac{-5}{\sqrt{59}} \\ \frac{-3}{\sqrt{59}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{\sqrt{59}} \\ \frac{-50}{\sqrt{59}} \\ \frac{-30}{\sqrt{59}} \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Vetores com Módulo 10

$$\vec{b} = -10\hat{\psi} = -10 \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{59}} \\ \frac{-5}{\sqrt{59}} \\ \frac{-3}{\sqrt{59}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-50}{\sqrt{59}} \\ \frac{50}{\sqrt{59}} \\ \frac{30}{\sqrt{59}} \end{pmatrix}$$

Conteúdo

Introdução

Definição

Produto Vetorial em $\mathbb{R}^2$

Norma do Produto Vetorial

Norma do Produto Vetorial

Dados

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Temos

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Norma do Produto Vetorial

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \sqrt{(v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3w_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2}$$

⋮ manipulações simples, mas longas e tediosas

$$= \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2}$$

Norma do Produto Vetorial

$$\begin{aligned}\|\vec{v} \times \vec{w}\| &= \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2} \\&= \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - (\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\theta))^2} \\&= \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \cos^2(\theta)} \\&= \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 (1 - \cos^2(\theta))} \\&= \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \sin^2(\theta)}\end{aligned}$$

Para $0 \leq \theta \leq \pi$ temos $\sin(\theta) \geq 0$

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin(\theta)$$