

Área do Paralelogramo

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Área do Paralelogramo

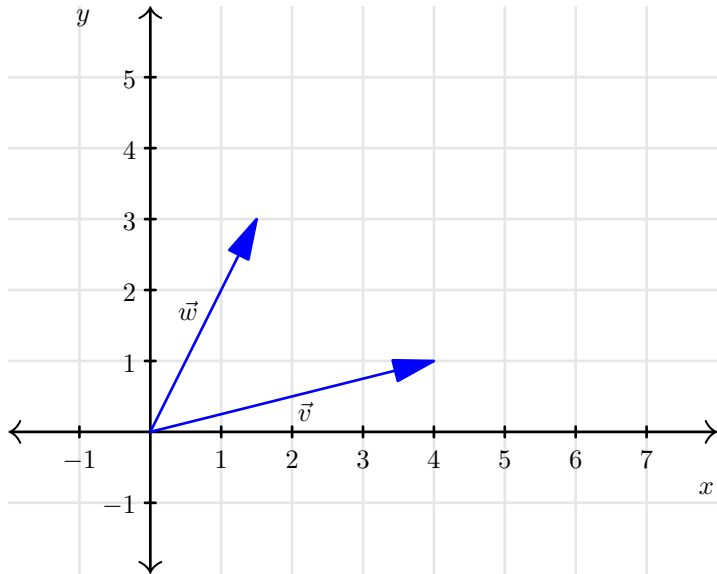
Área do Triângulo

Paralelogramo Determinado por Dois Vetores

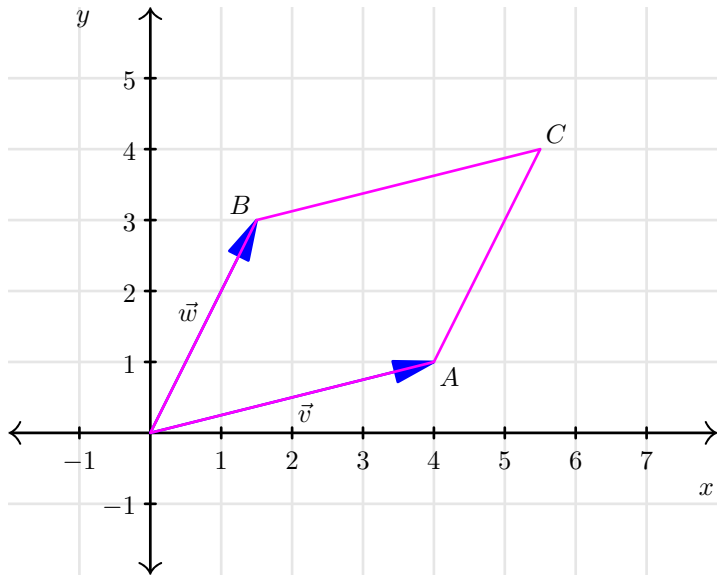
Dois vetores com a mesma origem determinam um paralelogramo

Qual a área desse paralelogramo?

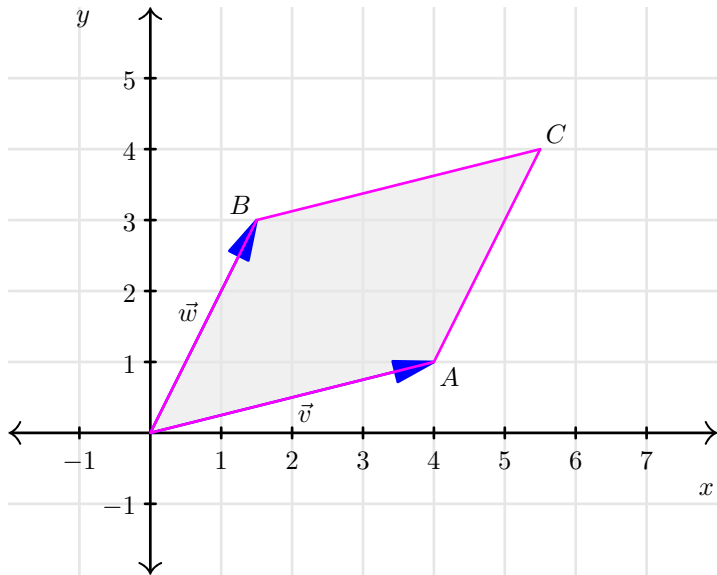
Paralelogramo Determinado por Dois Vetores



Paralelogramo Determinado por Dois Vetores



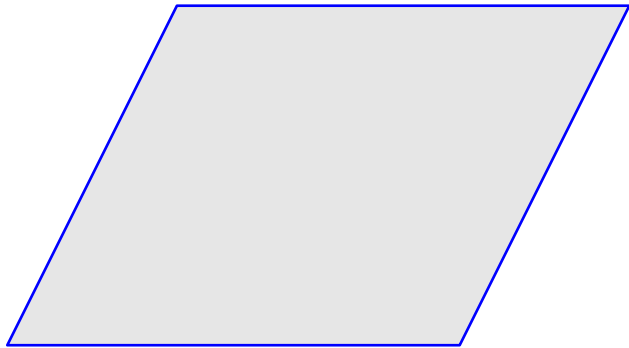
Paralelogramo Determinado por Dois Vetores



Área do Paralelogramo

área = base $\times$ altura

$$A = bh$$



Base e Altura do Paralelogramo

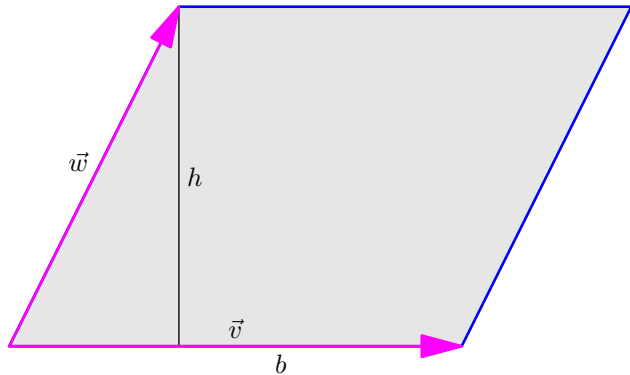
Escolhendo $\vec{v}$ como base

$$b = \|\vec{v}\|$$

A altura é a componente
de $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{v}$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{h}{\|\vec{w}\|}$$

$$h = \|\vec{w}\| \text{sen } \theta$$



Área do Paralelogramo

$$A = bh$$

$$= \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \operatorname{sen} \theta$$

$$= \|\vec{v} \times \vec{w}\|$$

Exemplo 1

Determine a área do paralelogramo definido pelos vetores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 0\vec{i} - 0\vec{j} + (3 \times 4)\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \|\vec{v} \times \vec{w}\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 12^2} \\ &= 12\end{aligned}$$

Conteúdo

Área do Paralelogramo

Área do Triângulo

Área do triângulo

Os mesmos dois vetores determinam também um triângulo

A área do triângulo é metade da área do paralelogramo

$$A_T = \frac{1}{2} \|\vec{v} \times \vec{w}\|$$

Área Determinada por Três Pontos

Considere três pontos A, B, C

Construímos os vetores

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = C - A$$

Área do paralelogramo determinado pelos pontos

$$A_P = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$$

Área do triângulo determinado pelos pontos

$$A_T = \frac{A_P}{2}$$

Exemplo 2

Determine a área do triângulo determinado pelos pontos

$$A = (1, 1, 0)$$

$$B = (4, 2, 1)$$

$$C = (2, 5, 2)$$

Exemplo 2 – Vetores

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Produto Vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (1 \times 2 - 1 \times 4) \vec{i} - (3 \times 2 - 1 \times 1) \vec{j} + (3 \times 4 - 1 \times 1) \vec{k} \\ &= -2\vec{i} - 5\vec{j} + 11\vec{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Norma

$$\begin{aligned}\|\vec{v} \times \vec{w}\| &= \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + 11^2} \\ &= \sqrt{4 + 25 + 121} \\ &= \sqrt{150}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Área

$$A_T = \frac{1}{2} \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \frac{1}{2} \sqrt{150}$$

Exemplo 3

Determine a área do paralelogramo determinado por

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Vetores

Consideramos as versões dos vetores em $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Produto Vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (3 \times 4 - 1 \times 1) \vec{k} \\ &= 11 \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Norma e Área

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{11^2} = 11$$

$$A = \|\vec{v} \times \vec{w}\| = 11$$

Exemplo 4

Determine a área do paralelogramo determinado pelos vetores

$$\vec{v} = (2, -1, 3) \quad \vec{w} = (1, 4, -2)$$

Exemplo 4 – Produto Vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= ((-1)(-2) - 3 \times 4) \vec{i} - (2(-2) - 3 \times 1) \vec{j} + (2 \times 4 - (-1)1) \vec{k} \\ &= -10\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Norma e Área

$$\begin{aligned}\|\vec{v} \times \vec{w}\| &= \left\| \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-10)^2 + 7^2 + 9^2} \\ &= \sqrt{100 + 49 + 81} \\ &= \sqrt{230}\end{aligned}$$

$$A = \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \sqrt{230}$$

Exemplo 5

Determine o valor de k para que o paralelogramo determinado pelos vetores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tenha área igual a $3\sqrt{6}$

Exemplo 5 – Produto Vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ k & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2 \times 2 + 1(-1))\vec{i} - (2k - 1)\vec{j} + (-k - 2)\vec{k} \\ &= 3\vec{i} + (1 - 2k)\vec{j} + (-k - 2)\vec{k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - 2k \\ -k - 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Norma

$$\begin{aligned}\|\vec{v} \times \vec{w}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - 2k \\ -k - 2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{3^2 + (1 - 2k)^2 + (-k - 2)^2} \\ &= \sqrt{9 + 1^2 - 4k + 4k^2 + k^2 + 4k + 4} \\ &= \sqrt{9 + 1 + 4 - 4k + 4k + 4k^2 + k^2} \\ &= \sqrt{14 + 5k^2}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Área

$$A = \|\vec{v} \times \vec{w}\| = 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{14 + 5k^2} = 3\sqrt{6}$$

$$14 + 5k^2 = (3\sqrt{6})^2$$

$$14 + 5k^2 = 9 \times 6$$

$$5k^2 = 54 - 14 = 40$$

$$k^2 = \frac{40}{5} = 8$$

$$k = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

Exemplo 6

Considere quatro pontos no espaço

$$A = (1, 0, 2)$$

$$B = (4, 1, 3)$$

$$C = (2, 4, 1)$$

$$D = (5, 5, 2)$$

Verifique se $ABCD$ é um paralelogramo, se for calcule sua área

Exemplo 6 – Verificação

Se $ABCD$ é um paralelogramo
ele pode ser definido pelos vetores

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AD}$$

com

$$C = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{v} + \vec{w}$$

Exemplo 6 – Verificação

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

$$= B - A$$

$$= (4, 1, 3) - (1, 0, 2)$$

$$= (3, 1, 1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AD}$$

$$= D - A$$

$$= (5, 5, 2) - (1, 0, 2)$$

$$= (4, 5, 0)$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (3, 1, 1) + (4, 5, 0)$$

$$= (7, 6, 1)$$

$$\neq (2, 4, 1) = C$$

Os pontos não formam um paralelogramo