

Produto Misto

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Definição

Propriedades

Coplanaridade

Produto Misto

Dados

$$\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$$

Produto misto

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

O produto misto é um escalar

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1

Calcule o produto misto dos vetores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Resolução

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{j}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(2 + 3) - \vec{j}(1 - 6) + \vec{k}(-1 - 4) \\ &= 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Resolução

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 15 + 5 + 10 = 30$$

Calculando o Produto Misto Diretamente

Se

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

então

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 2

Calcule o produto misto $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$ para

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\&= 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \\&= 2(-1 - 4) - (1 - 6) \\&= 2(-5) - (-5) \\&= -5\end{aligned}$$

Conteúdo

Definição

Propriedades

Coplanaridade

Sinal do Produto Misto

Para

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

Se $\vec{z}$ aponta para o lado de $\vec{v} \times \vec{w}$

$$p > 0$$

Se $\vec{z}$ aponta para o lado oposta a $\vec{v} \times \vec{w}$

$$p < 0$$

Se $\vec{z}$ é paralelo ao plano determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$p = 0$$

Propriedade de Permutação

Trocas de duas posições mudam o sinal

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = -(\vec{w} \times \vec{v}) \cdot \vec{z}$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = -(\vec{v} \times \vec{z}) \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = -(\vec{z} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}$$

Permutações cíclicas preservam o valor

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = (\vec{w} \times \vec{z}) \cdot \vec{v} = (\vec{z} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Exemplo 3

Dados

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcule $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$ e $(\vec{w} \times \vec{v}) \cdot \vec{z}$

Exemplo 3 – Resolução

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\&= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\&= -3 - 10 \\&= -13\end{aligned}$$

$$(\vec{w} \times \vec{v}) \cdot \vec{z} = -(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = -(-13) = 13$$

Conteúdo

Definição

Propriedades

Coplanaridade

Coplanaridade

Três vetores de $\mathbb{R}^3$ são **coplanares** quando pertencem a um mesmo plano

Condição equivalente

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = 0$$

Exemplo 4

Verifique se os vetores são coplanares

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Condição de coplanaridade

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = 0$$

Exemplo 4 – Resolução

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\&= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\&= (-14) - 2(-5) + 11 \\&= 7 \neq 0\end{aligned}$$

Os três vetores não são coplanares

Exemplo 5

Determine a para que os vetores sejam coplanares

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Condição de coplanaridade

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = 0$$

Exemplo 5 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -7 - 2(8 - a) + 3(6 + a)$$

$$= -7 - 16 + 2a + 18 + 3a$$

$$= 5a - 5$$

$$p = 0$$

$$5a - 5 = 0$$

$$5a = 5$$

$$a = 1$$