

Posições Relativas de Retas

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

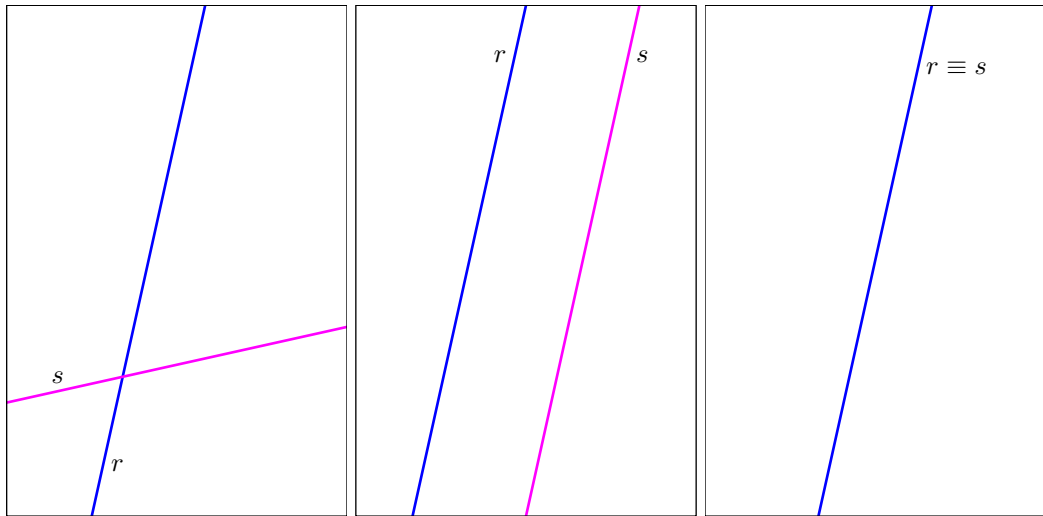
Conteúdo

Posições Relativas no Plano

Posições Relativas no Espaço

Procedimento Geral

Posições Relativas no Plano



Posições Relativas entre Duas Retas no Plano

No plano, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — não se tocam
- ▶ coincidentes — são a mesma reta

Determinando a Posição Relativa entre Duas Retas no Plano

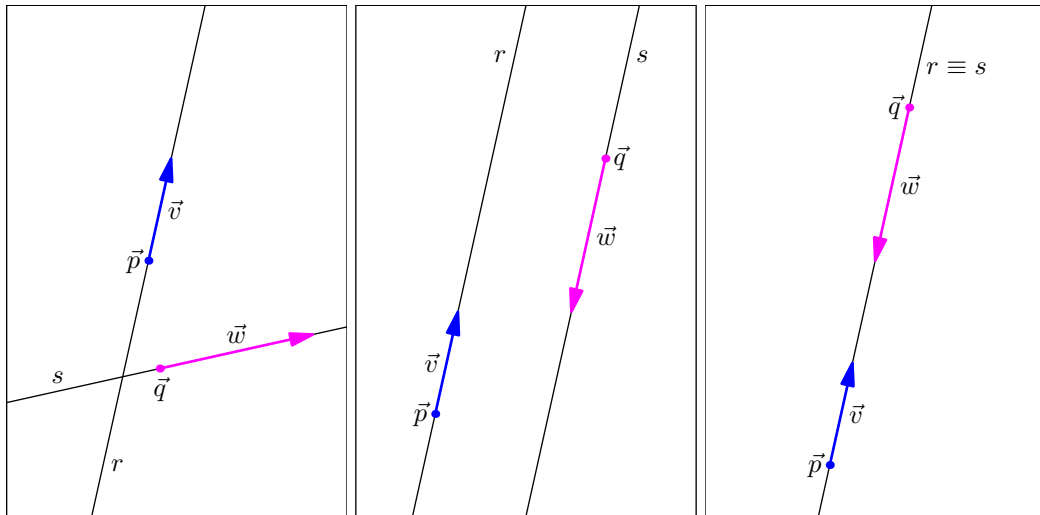
Dadas duas retas

$$r: \vec{r} = \vec{p} + t \vec{v}$$

$$s: \vec{r} = \vec{q} + \tau \vec{w}$$

Analisamos os vetores diretores $\vec{v}$ e $\vec{w}$

Posições Relativas



Retas Paralelas no Plano

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ **não** são paralelos, as retas são **concorrentes**

Se os vetores são **paralelos**, i.e., existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{w} = \alpha \vec{v}$$

as retas são

- ▶ **coincidentes**, se possuem um ponto em comum
- ▶ **paralelas distintas**, caso contrário

Exemplo 1

Determine a posição relativa entre as retas r e s

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = -2 + 4\tau \\ y = 5 - 2\tau \end{cases}$$

Exemplo 1 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (2, -1)$$

$$\vec{w} = (4, -2)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

os vetores são paralelos

Então as retas são paralelas distintas ou coincidentes

Exemplo 1 – Solução

Igualando as coordenadas, temos o sistema

$$\begin{cases} 1 + 2t = -2 + 4\tau \\ 3 - t = 5 - 2\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 4\tau = -3 \\ -t + 2\tau = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 4\tau = -3 \\ 2t - 4\tau = -4 \end{cases}$$

As equações são incompatíveis, portanto, as retas são paralelas distintas

Exemplo 1 – Solução Alternativa

Se as retas são coincidentes todos os pontos em r também estão em s

Escolhemos o ponto associado a $t = 0$ na reta r

$$(x, y) = (1, 3)$$

Substituindo nas equações da reta s temos

$$\begin{cases} 1 = -2 + 4\tau \\ 3 = 5 - 2\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau = 3/4 \\ \tau = -2/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\tau = 3 \\ 2\tau = -2 \end{cases}$$

As equações são incompatíveis,
portanto, as retas são paralelas distintas

Exemplo 2

Determine a posição relativa e o ponto de interseção, caso exista,

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 - \tau \\ y = 8 - 3\tau \end{cases}$$

Exemplo 2 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2)$$

$$\vec{w} = (-1, -3)$$

Eles não são paralelos

Portanto, no plano, as retas são concorrentes

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$t = 3 - \tau = 3$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

Substituindo na reta s

$$x = 4 - \tau = 4$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$y = 8 - 3\tau = 8$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

Assim $r \cap s = \{(4, 8)\}$

$$\tau = 0$$

Conteúdo

Posições Relativas no Plano

Posições Relativas no Espaço

Procedimento Geral

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — “mantêm a distância”
- ▶ coincidentes — são a mesma reta
- ▶ reversas — não são paralelas e não possuem ponto de interseção

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

Dadas duas retas

$$r: \vec{r} = \vec{p} + t \vec{v}$$

$$s: \vec{r} = \vec{q} + \tau \vec{w}$$

Verificamos se existe α , tal que

$$\vec{v} = \alpha \vec{w}$$

Se os vetores forem paralelos as retas são **paralelas distintas** ou **coincidentes**

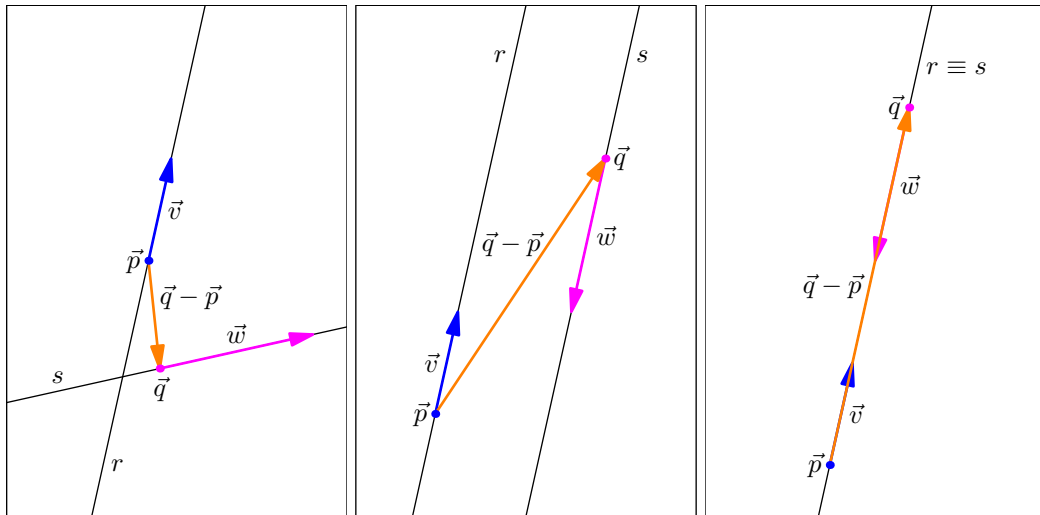
Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

Se os vetores **não** forem paralelos

Se as retas estiverem no mesmo plano elas são **concorrentes**

Se estiverem em planos diferentes são **reversas**

Retas Reversas



Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

As retas são coplanares, se os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{q} - \vec{p}$ são coplanares

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) = 0$$

nesse caso, as retas são **concorrentes**

Se $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \neq 0$ as retas são **reversas**

Exemplo 3

Determine a posição relativa entre as retas e, caso exista, o ponto de interseção

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 - 5\tau \\ y = \tau \\ z = 7 - 2\tau \end{cases}$$

Exemplo 3 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, -1, 2)$$

$$\vec{w} = (-1, 1, -2)$$

Como

$$\vec{w} = -\vec{v}$$

as retas são paralelas

Exemplo 3 – Solução

Para verificar se são coincidentes, comparamos os pontos

$$P = (1, 2, 3)$$

$$Q = (3, 0, 7)$$

Temos

$$Q - P = (2, -2, 4) = 2\vec{v}$$

Portanto, o ponto Q pertence à reta r

Consequentemente, as duas retas são coincidentes

Exemplo 4

Determine a posição relativa entre as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 2\tau \\ y = 1 + 4\tau \\ z = 2 + 6\tau \end{cases}$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

$$1 = 4 + 2\tau$$

$$2\tau = -3$$

$$\tau = \frac{-3}{2}$$

$$y = 1 + 4\tau$$

$$= 1 + 4\frac{-3}{2}$$

$$= -5$$

$$\neq 2$$

portanto, $P \notin s$

As retas são
paralelas distintas

Exemplo 5

Determine a posição relativa entre as retas

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + \tau \\ y = 2 - \tau \\ z = 1 + \tau \end{cases}$$

Exemplo 5 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 1, 2)$$

$$\vec{w} = (1, -1, 1)$$

Eles não são paralelos

Então, as retas podem ser concorrentes ou reversas

Exemplo 5 – Solução

Construindo o vetor conectando as duas retas

$$\vec{p} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{q} = (1, 2, 1)$$

$$\vec{d} = \vec{q} - \vec{p} = (1, 2, 1) - (0, 1, 0) = (1, 1, 1)$$

Precisamos verificar se os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{d}$ são coplanares

Exemplo 5 – Solução

Produto misto

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{d} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\&= (-1 - 1) - 0 + 2(1 + 1) \\&= 2 \neq 0\end{aligned}$$

Os vetores não são coplanares

Consequentemente, as retas são reversas

Conteúdo

Posições Relativas no Plano

Posições Relativas no Espaço

Procedimento Geral

Determinar a Posição Relativa

Dadas as retas

$$r: \vec{r} = \vec{p} + t \vec{v}$$

$$s: \vec{r} = \vec{q} + \tau \vec{w}$$

Verificamos se os vetores diretores são paralelos

$$\vec{w} \stackrel{?}{=} \alpha \vec{v}$$

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores diretores forem **paralelos**

$$\vec{v} = \alpha \vec{w}$$

as retas são paralelas ou coincidentes

Se $\vec{p} - \vec{q}$ é paralelo a $\vec{v}$ e as retas são coincidentes

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores **não** forem paralelos

No **plano**: as retas são concorrente

No **espaço**: calculamos o produto misto $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q})$

Se o produto misto for zero, as retas são coplanares e concorrentes

Se o produto misto for diferente de zero, as retas são reversas