

Posto de Uma Matriz

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Posto de uma matriz

Posto de Uma Matriz

Posto de uma matriz

Posto de Uma Matriz

Posto de uma matriz

- ▶ o número de pivôs que aparecem em sua forma escalonada

Posto de Uma Matriz

Posto de uma matriz

- ▶ o número de pivôs que aparecem em sua forma escalonada
- ▶ o número de linhas não nulas de uma matriz em forma escalonada

Posto de Uma Matriz

Posto de uma matriz

- ▶ o número de pivôs que aparecem em sua forma escalonada
- ▶ o número de linhas não nulas de uma matriz em forma escalonada

$\text{posto}(A)$

Posto de Uma Matriz

Posto de uma matriz

- ▶ o número de pivôs que aparecem em sua forma escalonada
- ▶ o número de linhas não nulas de uma matriz em forma escalonada

$$\text{posto}(A) = \text{rank}(A)$$

Posto de Uma Matriz

Posto de uma matriz

- ▶ o número de pivôs que aparecem em sua forma escalonada
- ▶ o número de linhas não nulas de uma matriz em forma escalonada

$$\text{posto}(A) = \text{rank}(A) = \text{número de pivôs de } A$$

Posto de Uma Matriz

Posto de uma matriz

- ▶ o número de pivôs que aparecem em sua forma escalonada
- ▶ o número de linhas não nulas de uma matriz em forma escalonada

$$\text{posto}(A) = \text{rank}(A) = \text{número de pivôs de } A$$

Veremos adiante que o posto é o número de linhas independentes da matriz

Exemplo 1

Determine o posto de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivôs

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivôs

$$a_{11} = 1$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivôs

$$a_{11} = 1$$

$$a_{22} = 1$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivôs

$$a_{11} = 1$$

$$a_{22} = 1$$

$$a_{33} = 2$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivôs

$$a_{11} = 1$$

$$a_{22} = 1$$

$$a_{33} = 2$$

Três pivôs

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivôs

$$a_{11} = 1$$

$$a_{22} = 1$$

$$a_{33} = 2$$

Três pivôs

$$\text{posto}(A) = 3$$

Exemplo 2

Determine o posto de B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz está na forma escalonada

Exemplo 2 – Solução

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz está na forma escalonada e possui duas linhas não nulas

Exemplo 2 – Solução

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz está na forma escalonada e possui duas linhas não nulas

$$\text{posto}(B) = 2$$

Posto e Variáveis Livres

Dado o sistema linear com n incógnitas

$$A_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}$$

Posto e Variáveis Livres

Dado o sistema linear com n incógnitas

$$A_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}$$

$$\text{posto}(A) = r$$

Posto e Variáveis Livres

Dado o sistema linear com n incógnitas

$$A_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}$$

$\text{posto}(A) = r$ existem r variáveis associadas a pivôs

Posto e Variáveis Livres

Dado o sistema linear com n incógnitas

$$A_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}$$

$\text{posto}(A) = r$ existem r variáveis associadas a pivôs

As demais $n - r$ variáveis são livres,

Posto e Variáveis Livres

Dado o sistema linear com n incógnitas

$$A_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}$$

$\text{posto}(A) = r$ existem r variáveis associadas a pivôs

As demais $n - r$ variáveis são livres, desde que o sistema seja compatível

Exemplo 3

Determine o número de variáveis livres do sistema linear associado à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(A) = 2$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(A) = 2$$

A possui 5 colunas,

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(A) = 2$$

A possui 5 colunas, o sistema linear tem $n = 5$ incógnitas

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(A) = 2$$

A possui 5 colunas, o sistema linear tem $n = 5$ incógnitas

Variáveis livres

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(A) = 2$$

A possui 5 colunas, o sistema linear tem $n = 5$ incógnitas

$$\text{Variáveis livres} = \text{posto}(A) - n$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(A) = 2$$

A possui 5 colunas, o sistema linear tem $n = 5$ incógnitas

$$\text{Variáveis livres} = \text{posto}(A) - n = 5 - 2$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(A) = 2$$

A possui 5 colunas, o sistema linear tem $n = 5$ incógnitas

$$\text{Variáveis livres} = \text{posto}(A) - n = 5 - 2 = 3$$

Posto de Uma Matriz Quadrada

Para uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Posto de Uma Matriz Quadrada

Para uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

temos

$$\text{posto}(A) \leq n$$

Posto de Uma Matriz Quadrada

Para uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

temos

$$\text{posto}(A) \leq n$$

Quando $\text{posto}(A) = n$

Posto de Uma Matriz Quadrada

Para uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

temos

$$\text{posto}(A) \leq n$$

Quando $\text{posto}(A) = n$ dizemos que A possui **posto completo**

Exemplo 4

Analise o posto da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Três pivôs

Exemplo 4 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Três pivôs

$$\text{posto}(A) = 3$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Três pivôs

$$\text{posto}(A) = 3$$

A é uma matriz 3×3

Exemplo 4 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Três pivôs

$$\text{posto}(A) = 3$$

A é uma matriz 3×3

A é quadrada com $n = 3$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Três pivôs

$$\text{posto}(A) = 3$$

A é uma matriz 3×3

A é quadrada com $n = 3$ e $\text{posto}(A) = 3$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Três pivôs

$$\text{posto}(A) = 3$$

A é uma matriz 3×3

A é quadrada com $n = 3$ e $\text{posto}(A) = 3$

A possui **posto completo**

Exemplo 5

Analise o posto da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemplo 5 – Solução

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(B) = 2$$

Exemplo 5 – Solução

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(B) = 2$$

B é uma matriz 3×3

Exemplo 5 – Solução

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(B) = 2$$

B é uma matriz 3×3

$$\text{posto}(B) = 2$$

Exemplo 5 – Solução

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(B) = 2$$

B é uma matriz 3×3

$$\text{posto}(B) = 2 < 3 = n$$

Exemplo 5 – Solução

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{posto}(B) = 2$$

B é uma matriz 3×3

$$\text{posto}(B) = 2 < 3 = n$$

B não possui posto completo

Teorema Fundamental para Sistemas Homogêneos

Dado um sistema homogêneo com n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Teorema Fundamental para Sistemas Homogêneos

Dado um sistema homogêneo com n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Se $\text{posto}(A) = n$

Teorema Fundamental para Sistemas Homogêneos

Dado um sistema homogêneo com n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Se $\text{posto}(A) = n$ o sistema possui somente a solução trivial

Teorema Fundamental para Sistemas Homogêneos

Dado um sistema homogêneo com n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Se $\text{posto}(A) = n$ o sistema possui somente a solução trivial

Se $\text{posto}(A) < n$

Teorema Fundamental para Sistemas Homogêneos

Dado um sistema homogêneo com n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Se $\text{posto}(A) = n$ o sistema possui somente a solução trivial

Se $\text{posto}(A) < n$ existem variáveis livres e soluções não triviais