

Propriedades dos Determinantes

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



Conteúdo

Propriedades dos Determinantes

Resumo

Propriedade 1 – Matriz triangular

Se A é uma matriz triangular superior ou inferior

Propriedade 1 – Matriz triangular

Se A é uma matriz triangular superior ou inferior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Propriedade 1 – Matriz triangular

Se A é uma matriz triangular superior ou inferior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Propriedade 1 – Matriz triangular

Se A é uma matriz triangular superior ou inferior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

então

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Exemplo 1

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A)$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33}$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} a_{22} a_{33} \\ &= 2 \times 4 \times (-2) \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} a_{22} a_{33} \\ &= 2 \times 4 \times (-2) \\ &= -16 \end{aligned}$$

Propriedade 2 – Matriz diagonal

Se A é diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Propriedade 2 – Matriz diagonal

Se A é diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

então

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Propriedade 2 – Matriz diagonal

Se A é diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

então

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Em particular

$$\det(I_n) = 1$$

Propriedade 3 – Troca de linhas

Quando duas linhas de uma matriz são trocadas

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

o determinante muda de sinal

$$\det(B) = -\det(A)$$

Exemplo 2

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Crie a matriz B trocando as linhas $L_1 \leftrightarrow L_2$

Calcule $\det(B)$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A)$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B)$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 3 \times 2 - 4 \times 1$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(B) &= 3 \times 2 - 4 \times 1 \\ &= 6 - 4\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(B) &= 3 \times 2 - 4 \times 1 \\ &= 6 - 4 \\ &= 2\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(B) &= 3 \times 2 - 4 \times 1 \\ &= 6 - 4 \\ &= 2 \\ &= -\det(A)\end{aligned}$$

Propriedade 4 – Multiplicação de uma linha

Quando todos os elementos de uma linha são multiplicados por k

Propriedade 4 – Multiplicação de uma linha

Quando todos os elementos de uma linha são multiplicados por k

$$L_i \leftarrow kL_i$$

Propriedade 4 – Multiplicação de uma linha

Quando todos os elementos de uma linha são multiplicados por k

$$L_i \leftarrow kL_i$$

o determinante também é multiplicado por k

Propriedade 4 – Multiplicação de uma linha

Quando todos os elementos de uma linha são multiplicados por k

$$L_i \leftarrow kL_i$$

o determinante também é multiplicado por k

$$\det(B) = k \det(A)$$

Propriedade 4 – Multiplicação de uma linha

Note que se multiplicarmos todas as linhas por k

Propriedade 4 – Multiplicação de uma linha

Note que se multiplicarmos todas as linhas por k
o determinante é multiplicado por k^n

Exemplo 3

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Crie a matriz B multiplicando a primeira linha por 3

Calcule $\det(B)$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A)$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(B)$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 3 \times 4 - 6 \times 3$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(B) &= 3 \times 4 - 6 \times 3 \\ &= 12 - 18\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(B) &= 3 \times 4 - 6 \times 3 \\ &= 12 - 18 \\ &= -6\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \times 4 - 2 \times 3 \\ &= 4 - 6 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(B) &= 3 \times 4 - 6 \times 3 \\ &= 12 - 18 \\ &= -6 \\ &= 3 \det(A)\end{aligned}$$

Propriedade 5 – Adição de múltiplo de uma linha

Adicionar um múltiplo de uma linha

$$L_i \leftarrow L_i + kL_j \quad i \neq j$$

Propriedade 5 – Adição de múltiplo de uma linha

Adicionar um múltiplo de uma linha

$$L_i \leftarrow L_i + kL_j \quad i \neq j$$

não altera o determinante

$$\det(B) = \det(A)$$

Exemplo 4

Calcule o determinante da matriz por escalonamento

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Solução

Propriedade 6 – Linha nula

Se uma matriz possui uma linha ou coluna composta somente por zeros

Propriedade 6 – Linha nula

Se uma matriz possui uma linha ou coluna composta somente por zeros

$$\det(A) = 0$$

Propriedade 6 – Linha nula

Se uma matriz possui uma linha ou coluna composta somente por zeros

$$\det(A) = 0$$

Consequência do Teorema de Laplace

Propriedade 7 – Linhas iguais

Se duas linhas de uma matriz são iguais

Propriedade 7 – Linhas iguais

Se duas linhas de uma matriz são iguais

$$\det(A) = 0$$

Propriedade 7 – Linhas iguais

Se trocarmos duas linhas o determinante muda de sinal

Propriedade 7 – Linhas iguais

Se trocarmos duas linhas o determinante muda de sinal

$$\det(B) = -\det(A)$$

Propriedade 7 – Linhas iguais

Se trocarmos duas linhas o determinante muda de sinal

$$\det(B) = -\det(A)$$

Mas como as linhas são iguais, a matriz não muda $B = A$

Propriedade 7 – Linhas iguais

Se trocarmos duas linhas o determinante muda de sinal

$$\det(B) = -\det(A)$$

Mas como as linhas são iguais, a matriz não muda $B = A$

$$\det(A) = -\det(A)$$

Propriedade 7 – Linhas iguais

Se trocarmos duas linhas o determinante muda de sinal

$$\det(B) = -\det(A)$$

Mas como as linhas são iguais, a matriz não muda $B = A$

$$\det(A) = -\det(A)$$

Logo

$$\det(A) = 0$$

Propriedade 8 – Linhas proporcionais

Se duas linhas de uma matriz são proporcionais

$$\det(A) = 0$$

Exemplo 5

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

A segunda linha é duas vezes a primeira

$$\det(A) = 0$$

Propriedade 9 – Transposta

O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta

$$\det(A^t) = \det(A)$$

Propriedade 9 – Transposta

O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta

$$\det(A^t) = \det(A)$$

As propriedades nas linhas também valem para as colunas

Propriedade 10 – Produto de matrizes

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Propriedade 10 – Produto de matrizes

Se A é invertível

Propriedade 10 – Produto de matrizes

Se A é invertível

$$\det(A) \det(A^{-1})$$

Propriedade 10 – Produto de matrizes

Se A é invertível

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1})$$

Propriedade 10 – Produto de matrizes

Se A é invertível

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I)$$

Propriedade 10 – Produto de matrizes

Se A é invertível

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Propriedade 10 – Produto de matrizes

Se A é invertível

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Logo

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Determinante e matriz inversa

Para uma matriz quadrada A

Determinante e matriz inversa

Para uma matriz quadrada A

$$\det(A) \neq 0$$

Determinante e matriz inversa

Para uma matriz quadrada A

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ é invertível}$$

Determinante e matriz inversa

Para uma matriz quadrada A

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ é invertível}$$

Equivalentemente

$$\det(A) = 0$$

Determinante e matriz inversa

Para uma matriz quadrada A

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ é invertível}$$

Equivalentemente

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ não é invertível}$$

Determinante e matriz inversa

Para uma matriz quadrada A

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ é invertível}$$

Equivalentemente

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ não é invertível}$$

Essa é uma das aplicações mais importantes do determinante

Exemplo 6

Verifique se a matriz é invertível

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Solução

A matriz é triangular

Exemplo 6 – Solução

A matriz é triangular

$$\det(A)$$

Exemplo 6 – Solução

A matriz é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33}$$

Exemplo 6 – Solução

A matriz é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} = 1 \times 1 \times 2$$

Exemplo 6 – Solução

A matriz é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

Exemplo 6 – Solução

A matriz é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

Como

$$\det(A) \neq 0$$

Exemplo 6 – Solução

A matriz é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

Como

$$\det(A) \neq 0$$

A é invertível

Exemplo 7

Verifique se a matriz é invertível

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7 – Solução

A segunda linha é o dobro da primeira

Exemplo 7 – Solução

A segunda linha é o dobro da primeira

Portanto

$$\det(B) = 0$$

Exemplo 7 – Solução

A segunda linha é o dobro da primeira

Portanto

$$\det(B) = 0$$

Assim B não é invertível

Exemplo 8

Determine os valores de k para os quais a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

é invertível

Exemplo 8 – Solução

Como A é triangular

Exemplo 8 – Solução

Como A é triangular

$$\det(A)$$

Exemplo 8 – Solução

Como A é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33}$$

Exemplo 8 – Solução

Como A é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} = 1 \times k \times 3$$

Exemplo 8 – Solução

Como A é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} = 1 \times k \times 3 = 3k$$

Exemplo 8 – Solução

Como A é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} = 1 \times k \times 3 = 3k$$

A matriz é invertível quando

Exemplo 8 – Solução

Como A é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} = 1 \times k \times 3 = 3k$$

A matriz é invertível quando

$$\det(A) \neq 0$$

Exemplo 8 – Solução

Como A é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} = 1 \times k \times 3 = 3k$$

A matriz é invertível quando

$$\det(A) \neq 0$$

$$3k \neq 0$$

Exemplo 8 – Solução

Como A é triangular

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} = 1 \times k \times 3 = 3k$$

A matriz é invertível quando

$$\det(A) \neq 0$$

$$3k \neq 0$$

$$k \neq 0$$

Conteúdo

Propriedades dos Determinantes

Resumo

Resumo das principais propriedades

Para uma matriz quadrada A

1. matriz triangular $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$
2. troca de duas linhas muda o sinal do determinante
3. multiplicação de uma linha por k multiplica o determinante por k
4. adicionar um múltiplo de uma linha a outra não altera o determinante
5. uma linha nula implica determinante nulo
6. duas linhas iguais ou proporcionais implicam determinante nulo
7. $\det(A^t) = \det(A)$
8. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$