

Definição de Vetores

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Vetores

Definição Geométrica

Definição algébrica

Etimologia do Termo Vetor

O termo latino vector deriva do verbo *vehere*,

Etimologia do Termo Vetor

O termo latino vector deriva do verbo *vehere*,
que quer dizer “levar”, “conduzir” ou “carregar”

Na Matemática e Física os vetores são “setinhas”

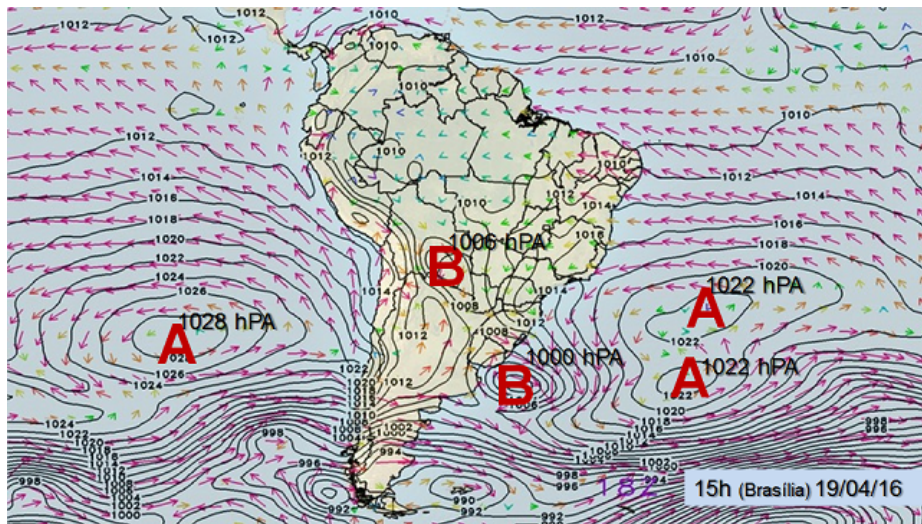
Na Matemática e Física os vetores são “setinhas”

Precisamos dizer isso de forma **precisa**

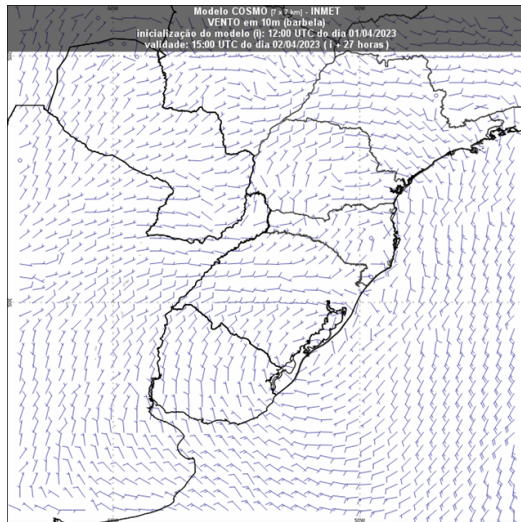
Na Matemática e Física os vetores são “setinhas”

Precisamos dizer isso de forma **precisa** e que nos permita fazer **cálculos**

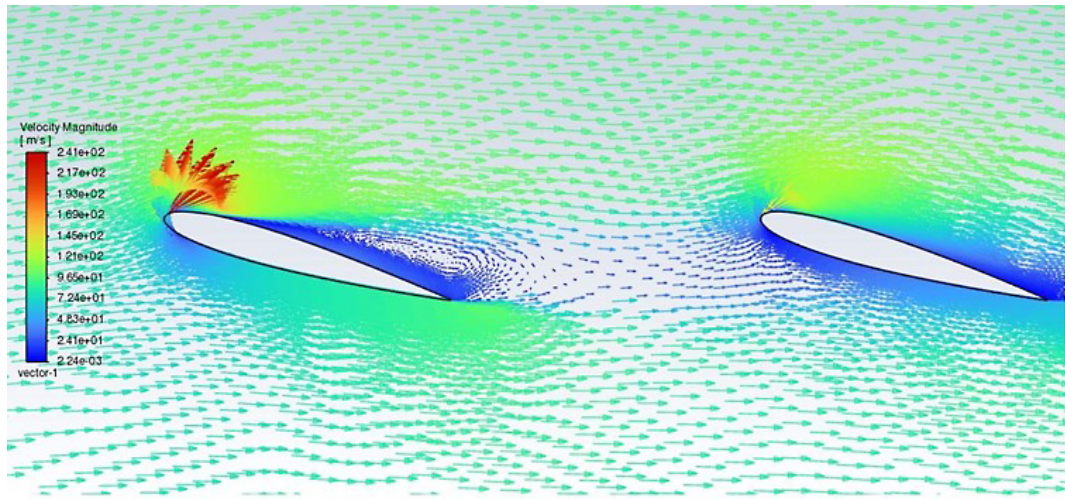
Mapa de Ventos



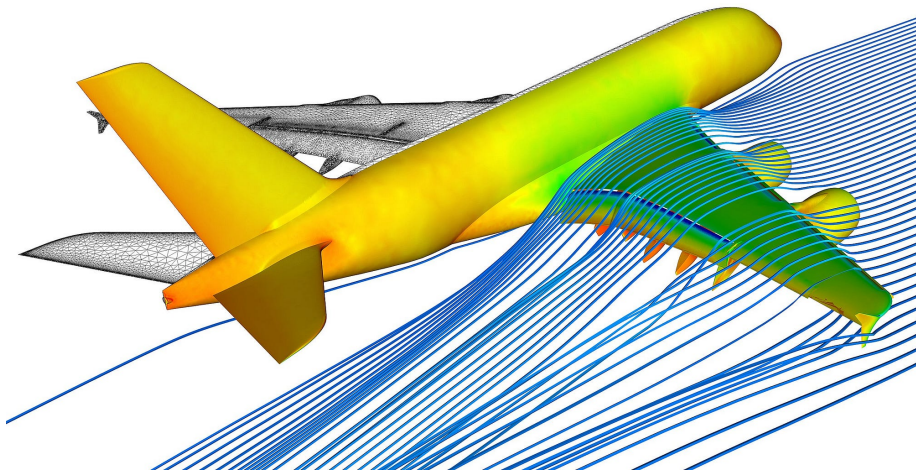
Mapa de Ventos



Fluxo em um Aerofólio



Linhas de Fluxo



Conteúdo

Vetores

Definição Geométrica

Definição algébrica

Definição geométrica de vetor

Um vetor é representado por um segmento de reta orientado

Definição geométrica de vetor

Um vetor é representado por um segmento de reta orientado

Representamos um vetor por uma seta

$$\overrightarrow{AB}$$

Definição geométrica de vetor

Um vetor é representado por um segmento de reta orientado

Representamos um vetor por uma seta

$$\overrightarrow{AB}$$

O ponto A é a origem do vetor

Definição geométrica de vetor

Um vetor é representado por um segmento de reta orientado

Representamos um vetor por uma seta

$$\overrightarrow{AB}$$

O ponto A é a origem do vetor

O ponto B é sua extremidade

Definição geométrica de vetor

Um vetor é representado por um segmento de reta orientado

Representamos um vetor por uma seta

$$\overrightarrow{AB}$$

O ponto A é a origem do vetor

O ponto B é sua extremidade

O vetor $\overrightarrow{AB}$ representa um deslocamento

Definição geométrica de vetor

Um vetor é representado por um segmento de reta orientado

Representamos um vetor por uma seta

$$\overrightarrow{AB}$$

O ponto A é a origem do vetor

O ponto B é sua extremidade

O vetor $\overrightarrow{AB}$ representa um deslocamento do ponto A para o ponto B

Características dos vetores

Um vetor possui três características fundamentais

Características dos vetores

Um vetor possui três características fundamentais

módulo ou norma, seu comprimento

Características dos vetores

Um vetor possui três características fundamentais

módulo ou norma, seu comprimento

direção a direção da reta que o contém

Características dos vetores

Um vetor possui três características fundamentais

módulo ou norma, seu comprimento

direção a direção da reta que o contém

sentido indicado pela orientação da seta

Vetores iguais

Dois vetores são considerados iguais quando possuem

Vetores iguais

Dois vetores são considerados iguais quando possuem

- ▶ o mesmo módulo

Vetores iguais

Dois vetores são considerados iguais quando possuem

- ▶ o mesmo módulo
- ▶ a mesma direção

Vetores iguais

Dois vetores são considerados iguais quando possuem

- ▶ o mesmo módulo
- ▶ a mesma direção
- ▶ o mesmo sentido

Vetores iguais

Dois vetores são considerados iguais quando possuem

- ▶ o mesmo módulo
- ▶ a mesma direção
- ▶ o mesmo sentido

A posição em que o vetor é desenhado **não** determina o vetor

Vetores iguais

Dois vetores são considerados iguais quando possuem

- ▶ o mesmo módulo
- ▶ a mesma direção
- ▶ o mesmo sentido

A posição em que o vetor é desenhado **não** determina o vetor

Podemos deslocar um vetor paralelamente sem alterar suas características

Vetor representado a partir da origem

Frequentemente, representamos um vetor partindo da origem

Vetor representado a partir da origem

Frequentemente, representamos um vetor partindo da origem

$$O = (0, 0)$$

Vetor representado a partir da origem

Frequentemente, representamos um vetor partindo da origem

$$O = (0, 0)$$

Notação

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$$

Vetor representado a partir da origem

Frequentemente, representamos um vetor partindo da origem

$$O = (0, 0)$$

Notação

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$$

Se $P = (a, b)$

Vetor representado a partir da origem

Frequentemente, representamos um vetor partindo da origem

$$O = (0, 0)$$

Notação

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$$

Se $P = (a, b)$

o vetor pode ser representado por

$$\vec{v} = (a, b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Vetor representado a partir da origem

Frequentemente, representamos um vetor partindo da origem

$$O = (0, 0)$$

Notação

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$$

Se $P = (a, b)$

o vetor pode ser representado por

$$\vec{v} = (a, b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Essa representação é conveniente para realizar cálculos

Independência do Ponto de Origem

O vetor não está associado exclusivamente à origem

Independência do Ponto de Origem

O vetor não está associado exclusivamente à origem

O mesmo vetor pode ser representado a partir de qualquer ponto do plano

Exemplo 1

Represente o vetor $\vec{v} = (2, 3)$ partindo de $A = (2, -1)$

Exemplo 1 – Solução

O vetor $\vec{v} = (2, 3)$ define

Exemplo 1 – Solução

O vetor $\vec{v} = (2, 3)$ define
deslocamento de 2 unidades para a direita

Exemplo 1 – Solução

O vetor $\vec{v} = (2, 3)$ define
deslocamento de 2 unidades para a direita
deslocamento de 3 unidades para cima

Exemplo 1 – Solução

O vetor $\vec{v} = (2, 3)$ define
deslocamento de 2 unidades para a direita
deslocamento de 3 unidades para cima

Partindo de $A = (2, -1)$

Exemplo 1 – Solução

O vetor $\vec{v} = (2, 3)$ define
deslocamento de 2 unidades para a direita
deslocamento de 3 unidades para cima

Partindo de $A = (2, -1)$

Avançamos para $(4, -1)$

Exemplo 1 – Solução

O vetor $\vec{v} = (2, 3)$ define
deslocamento de 2 unidades para a direita
deslocamento de 3 unidades para cima

Partindo de $A = (2, -1)$

Avançamos para $(4, -1)$

Depois para $(4, 2)$

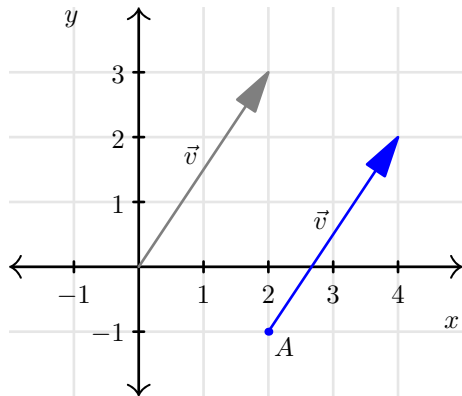
Exemplo 1 – Solução

O vetor $\vec{v} = (2, 3)$ define
deslocamento de 2 unidades para a direita
deslocamento de 3 unidades para cima

Partindo de $A = (2, -1)$

Avançamos para $(4, -1)$

Depois para $(4, 2)$



Conteúdo

Vetores

Definição Geométrica

Definição algébrica

Definição Algébrica

No plano, $\mathbb{R}^2$, cada vetor pode ser representado por um par ordenado

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Definição Algébrica

No plano, $\mathbb{R}^2$, cada vetor pode ser representado por um par ordenado

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

No espaço tridimensional, $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Definição Algébrica

Um vetor de $\mathbb{R}^n$ é uma n -upla

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Definição Algébrica

Um vetor de $\mathbb{R}^n$ é uma n -upla

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Os números $v_1, v_2, \dots, v_n$ são as **componentes** do vetor

Exemplo 2

Encontre o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos

$$A = (2, 3)$$

$$B = (1, 4)$$

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x$$

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x = 1 - 2$$

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x = 1 - 2 = -1$$

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x = 1 - 2 = -1$$

O deslocamento na coordenada y entre os pontos A e B é

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x = 1 - 2 = -1$$

O deslocamento na coordenada y entre os pontos A e B é

$$v_y$$

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x = 1 - 2 = -1$$

O deslocamento na coordenada y entre os pontos A e B é

$$v_y = 4 - 3$$

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x = 1 - 2 = -1$$

O deslocamento na coordenada y entre os pontos A e B é

$$v_y = 4 - 3 = 1$$

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x = 1 - 2 = -1$$

O deslocamento na coordenada y entre os pontos A e B é

$$v_y = 4 - 3 = 1$$

Portanto

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x = 1 - 2 = -1$$

O deslocamento na coordenada y entre os pontos A e B é

$$v_y = 4 - 3 = 1$$

Portanto

$$\vec{v}$$

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x = 1 - 2 = -1$$

O deslocamento na coordenada y entre os pontos A e B é

$$v_y = 4 - 3 = 1$$

Portanto

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

O deslocamento na coordenada x entre os pontos A e B é

$$v_x = 1 - 2 = -1$$

O deslocamento na coordenada y entre os pontos A e B é

$$v_y = 4 - 3 = 1$$

Portanto

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3

Dado o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ com $P = (2, -1)$ e $Q = (5, 3)$ determine

- 1) o vetor $\vec{u}$
- 2) o ponto na extremidade do vetor $\vec{u}$ partindo da origem
- 3) o ponto na extremidade do vetor $\vec{u}$ partindo do ponto $(-1, -2)$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O vetor $\vec{u}$ partindo da origem termina no ponto $(3, 4)$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O vetor $\vec{u}$ partindo da origem termina no ponto $(3, 4)$

O vetor $\vec{u}$ partindo do ponto $(-1, -2)$ termina no ponto com coordenadas

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O vetor $\vec{u}$ partindo da origem termina no ponto $(3, 4)$

O vetor $\vec{u}$ partindo do ponto $(-1, -2)$ termina no ponto com coordenadas

x

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O vetor $\vec{u}$ partindo da origem termina no ponto $(3, 4)$

O vetor $\vec{u}$ partindo do ponto $(-1, -2)$ termina no ponto com coordenadas

$$x = -1 + u_x$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O vetor $\vec{u}$ partindo da origem termina no ponto $(3, 4)$

O vetor $\vec{u}$ partindo do ponto $(-1, -2)$ termina no ponto com coordenadas

$$x = -1 + u_x = -1 + 3$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O vetor $\vec{u}$ partindo da origem termina no ponto $(3, 4)$

O vetor $\vec{u}$ partindo do ponto $(-1, -2)$ termina no ponto com coordenadas

$$x = -1 + u_x = -1 + 3 = 2$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O vetor $\vec{u}$ partindo da origem termina no ponto $(3, 4)$

O vetor $\vec{u}$ partindo do ponto $(-1, -2)$ termina no ponto com coordenadas

$$x = -1 + u_x = -1 + 3 = 2$$

$$y$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O vetor $\vec{u}$ partindo da origem termina no ponto $(3, 4)$

O vetor $\vec{u}$ partindo do ponto $(-1, -2)$ termina no ponto com coordenadas

$$x = -1 + u_x = -1 + 3 = 2$$

$$y = -2 + u_y$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O vetor $\vec{u}$ partindo da origem termina no ponto $(3, 4)$

O vetor $\vec{u}$ partindo do ponto $(-1, -2)$ termina no ponto com coordenadas

$$x = -1 + u_x = -1 + 3 = 2$$

$$y = -2 + u_y = -2 + 4$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O vetor $\vec{u}$ partindo da origem termina no ponto $(3, 4)$

O vetor $\vec{u}$ partindo do ponto $(-1, -2)$ termina no ponto com coordenadas

$$x = -1 + u_x = -1 + 3 = 2$$

$$y = -2 + u_y = -2 + 4 = 2$$

Exemplo 4

Avalie e esboce o vetor

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{pmatrix}$$

nos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$

Exemplo 4 – Ponto $(0, 0)$

$$v(0, 0)$$

Exemplo 4 – Ponto $(0, 0)$

$$v(0, 0) = \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)}$$

Exemplo 4 – Ponto $(0, 0)$

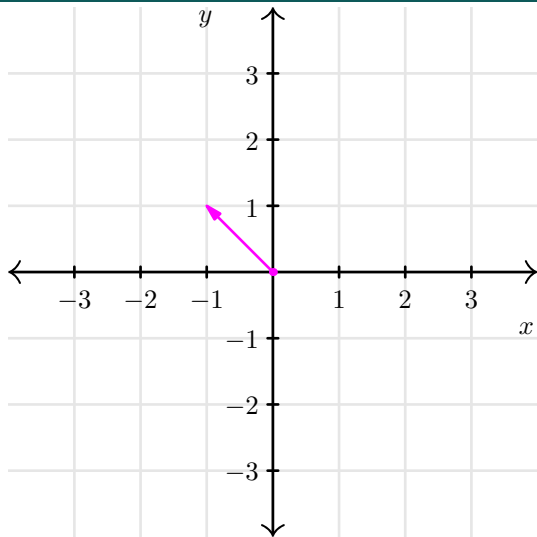
$$\begin{aligned} v(0, 0) &= \left(\begin{array}{c} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} \\ &= \left(\begin{array}{c} 2 \times 0 + 0 - 1 \\ 1 + 0 - 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Ponto $(0, 0)$

$$\begin{aligned} v(0, 0) &= \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 0 + 0 - 1 \\ 1 + 0 - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Ponto $(0, 0)$

$$\begin{aligned} v(0, 0) &= \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 0 + 0 - 1 \\ 1 + 0 - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Exemplo 4 – Ponto $(1, 1)$

$$v(1, 1)$$

Exemplo 4 – Ponto $(1, 1)$

$$v(1, 1) = \left(\begin{array}{c} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{array} \right) \Big|_{(1,1)}$$

Exemplo 4 – Ponto $(1, 1)$

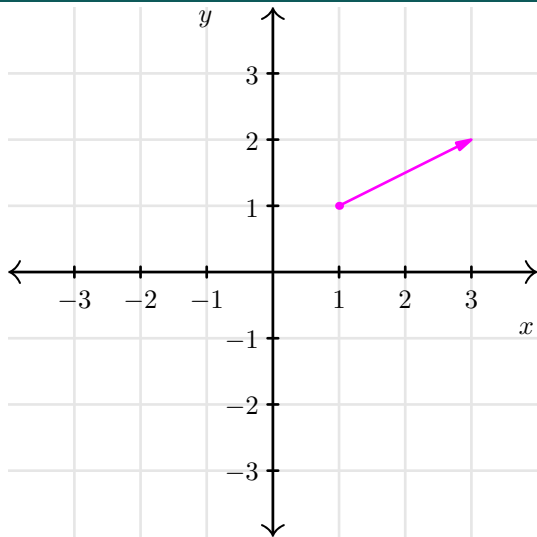
$$\begin{aligned} v(1, 1) &= \left(\begin{array}{c} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{array} \right) \Big|_{(1,1)} \\ &= \left(\begin{array}{c} 2 \times 1 + 1 - 1 \\ 1 + 1 - 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Ponto $(1, 1)$

$$\begin{aligned} v(1, 1) &= \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{pmatrix} \Big|_{(1,1)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 - 1 \\ 1 + 1 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Ponto $(1, 1)$

$$\begin{aligned} v(1, 1) &= \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{pmatrix} \Big|_{(1,1)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 - 1 \\ 1 + 1 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Exemplo 4 – Ponto $(1, -1)$

$$v(1, -1)$$

Exemplo 4 – Ponto $(1, -1)$

$$v(1, -1) = \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{pmatrix} \Big|_{(1, -1)}$$

Exemplo 4 – Ponto $(1, -1)$

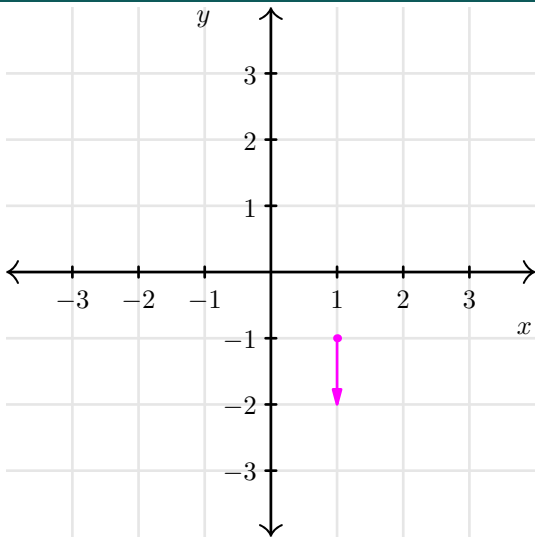
$$\begin{aligned} v(1, -1) &= \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{pmatrix} \Big|_{(1, -1)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-1) - 1 \\ 1 + (-1) - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Ponto $(1, -1)$

$$\begin{aligned} v(1, -1) &= \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{pmatrix} \Big|_{(1, -1)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-1) - 1 \\ 1 + (-1) - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Ponto $(1, -1)$

$$\begin{aligned} v(1, -1) &= \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ 1 + y - x \end{pmatrix} \Big|_{(1, -1)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-1) - 1 \\ 1 + (-1) - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Campo Vetorial $\times 0,1$

