

Produto Escalar

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Produto escalar

Fórmula Alternativa

Produto escalar

Dados os vetores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Produto escalar

Dados os vetores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

O produto escalar

Produto escalar

Dados os vetores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

O produto escalar ou produto interno

Produto escalar

Dados os vetores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

O **produto escalar** ou **produto interno** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é

Produto escalar

Dados os vetores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

O **produto escalar** ou **produto interno** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Produto escalar

Dados os vetores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

O **produto escalar** ou **produto interno** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Produto escalar

Dados os vetores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

O **produto escalar** ou **produto interno** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{i=1}^n u_iv_i$$

Produto escalar

Dados os vetores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

O **produto escalar** ou **produto interno** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{i=1}^n u_iv_i$$

O resultado do produto escalar é um número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1

Calcule o produto escalar dos vetores

$$\vec{w} = (2, 3) \qquad \vec{v} = (4, -1)$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (4, -1)$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (2, 3) \cdot (4, -1) \\ &= 2 \times 4 + 3(-1)\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (2, 3) \cdot (4, -1) \\ &= 2 \times 4 + 3(-1) \\ &= 8 - 3\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (2, 3) \cdot (4, -1) \\ &= 2 \times 4 + 3(-1) \\ &= 8 - 3 \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule o produto escalar dos vetores

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times 4 + (-2)0 + 3(-1)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times 4 + (-2)0 + 3(-1) \\ &= 4 + 0 - 3\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times 4 + (-2)0 + 3(-1) \\ &= 4 + 0 - 3 \\ &= 1\end{aligned}$$

Calculando a Norma pelo Produto Escalar

Dado um vetor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

Calculando a Norma pelo Produto Escalar

Dado um vetor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

Calculamos

Calculando a Norma pelo Produto Escalar

Dado um vetor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

Calculamos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + \dots + u_n^2$$

Calculando a Norma pelo Produto Escalar

Dado um vetor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

Calculamos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + \dots + u_n^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

Calculando a Norma pelo Produto Escalar

Dado um vetor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

Calculamos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + \dots + u_n^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

Comparando temos

Calculando a Norma pelo Produto Escalar

Dado um vetor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

Calculamos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + \dots + u_n^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

Comparando temos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Calculando a Norma pelo Produto Escalar

Dado um vetor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

Calculamos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + \dots + u_n^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

Comparando temos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Morma como Consequência do Produto Escalar

A relação

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

mostra que o produto escalar **determina** a norma

Exemplo 3

Calcule sua norma do vetor utilizando o produto escalar

$$\vec{u} = (2, -3, 6, -1)$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} \cdot \vec{u}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (2, -3, 6, -1) \cdot (2, -3, 6, -1)$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= (2, -3, 6, -1) \cdot (2, -3, 6, -1) \\ &= 2^2 + (-3)^2 + 6^2 + (-1)^2\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= (2, -3, 6, -1) \cdot (2, -3, 6, -1) \\ &= 2^2 + (-3)^2 + 6^2 + (-1)^2 \\ &= 4 + 9 + 36 + 1\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= (2, -3, 6, -1) \cdot (2, -3, 6, -1) \\ &= 2^2 + (-3)^2 + 6^2 + (-1)^2 \\ &= 4 + 9 + 36 + 1 \\ &= 50\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= (2, -3, 6, -1) \cdot (2, -3, 6, -1) \\ &= 2^2 + (-3)^2 + 6^2 + (-1)^2 \\ &= 4 + 9 + 36 + 1 \\ &= 50\end{aligned}$$

$$\|\vec{u}\|$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= (2, -3, 6, -1) \cdot (2, -3, 6, -1) \\ &= 2^2 + (-3)^2 + 6^2 + (-1)^2 \\ &= 4 + 9 + 36 + 1 \\ &= 50\end{aligned}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= (2, -3, 6, -1) \cdot (2, -3, 6, -1) \\ &= 2^2 + (-3)^2 + 6^2 + (-1)^2 \\ &= 4 + 9 + 36 + 1 \\ &= 50\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \\ &= \sqrt{50}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= (2, -3, 6, -1) \cdot (2, -3, 6, -1) \\ &= 2^2 + (-3)^2 + 6^2 + (-1)^2 \\ &= 4 + 9 + 36 + 1 \\ &= 50\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

Propriedades do produto escalar

Para vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e escalare λ

Propriedades do produto escalar

Para vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e escalare λ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Propriedades do produto escalar

Para vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e escalare λ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Propriedades do produto escalar

Para vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e escalare λ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Propriedades do produto escalar

Para vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e escalare λ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Conteúdo

Produto escalar

Fórmula Alternativa

Fórmula Alternativa

Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem

Fórmula Alternativa

Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem

Seja θ o ângulo entre eles

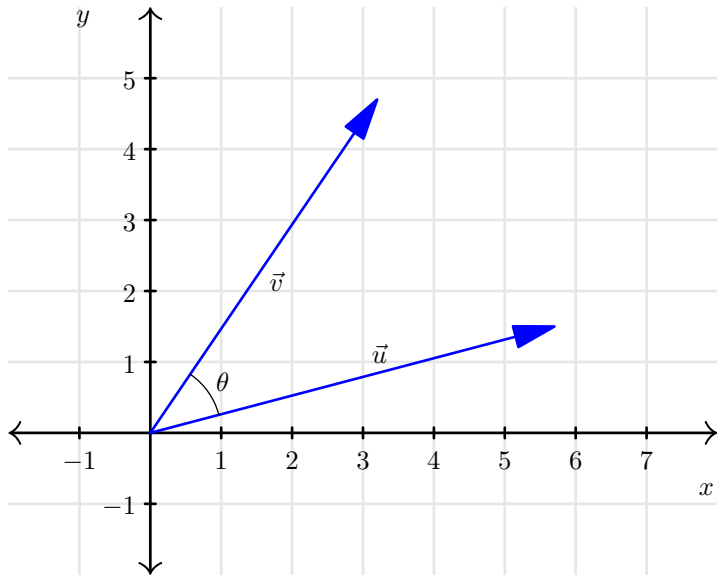
Fórmula Alternativa

Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem

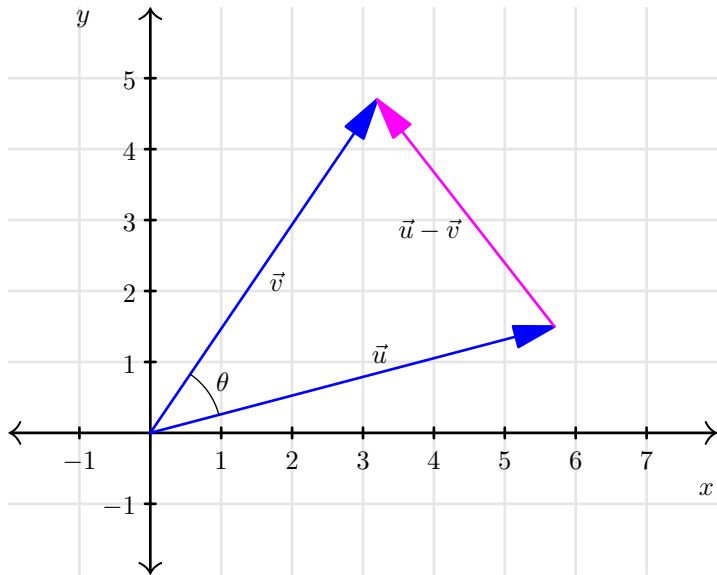
Seja θ o ângulo entre eles

Queremos relacionar as componentes dos vetores com o ângulo θ

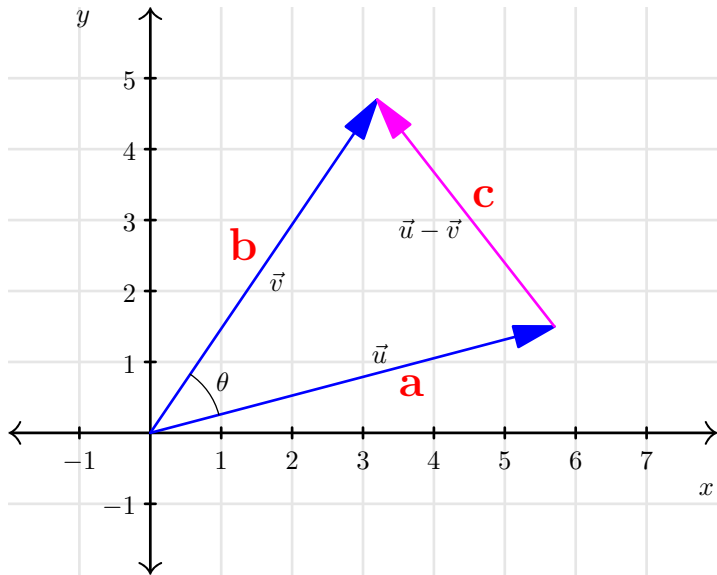
Formula Alternativa



Formula Alternativa



Formula Alternativa



Lei dos cossenos

Lei dos cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

Lei dos cossenos

Lei dos cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

No triângulo

Lei dos cossenos

Lei dos cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

No triângulo

$$a = \|\vec{u}\|$$

Lei dos cossenos

Lei dos cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

No triângulo

$$a = \|\vec{u}\| \qquad b = \|\vec{v}\|$$

Lei dos cossenos

Lei dos cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

No triângulo

$$a = \|\vec{u}\| \qquad b = \|\vec{v}\| \qquad c = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Lei dos cossenos

Lei dos cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

No triângulo

$$a = \|\vec{u}\| \qquad b = \|\vec{v}\| \qquad c = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Portanto

Lei dos cossenos

Lei dos cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

No triângulo

$$a = \|\vec{u}\| \qquad b = \|\vec{v}\| \qquad c = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Portanto

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

Fórmula Alternativa

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

Fórmula Alternativa

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

$$2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

Fórmula Alternativa

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

$$2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

Fórmula Alternativa

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

$$2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v})$$

Fórmula Alternativa

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

$$2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Fórmula Alternativa

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

$$2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Fórmula Alternativa

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

$$2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Significado Geométrico

A fórmula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

Significado Geométrico

A fórmula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

mostra que o produto escalar depende

Significado Geométrico

A fórmula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

mostra que o produto escalar depende

- ▶ do comprimento de $\vec{u}$

Significado Geométrico

A fórmula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

mostra que o produto escalar depende

- ▶ do comprimento de $\vec{u}$
- ▶ do comprimento de $\vec{v}$

Significado Geométrico

A fórmula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

mostra que o produto escalar depende

- ▶ do comprimento de $\vec{u}$
- ▶ do comprimento de $\vec{v}$
- ▶ do ângulo entre os vetores

Significado Geométrico

Como $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ temos

Significado Geométrico

Como $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ temos

$$-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$