

Ângulo entre Vetores

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Ângulo entre Vetores

Ortogonalidade

Calculando o Ângulo

Com as componentes dos vetores podemos calcular o ângulo entre eles

Calculando o Ângulo

Com as componentes dos vetores podemos calcular o ângulo entre eles

Se nenhum vetor é nulo

Calculando o Ângulo

Com as componentes dos vetores podemos calcular o ângulo entre eles

Se nenhum vetor é nulo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

Calculando o Ângulo

Com as componentes dos vetores podemos calcular o ângulo entre eles

Se nenhum vetor é nulo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Calculando o Ângulo

Com as componentes dos vetores podemos calcular o ângulo entre eles

Se nenhum vetor é nulo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$

Dimensões Maiores

A expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$ vale em $\mathbb{R}^n$

Dimensões Maiores

A expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$ vale em $\mathbb{R}^n$

Definimos o ângulo entre vetores em dimensões maiores por

Dimensões Maiores

A expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$ vale em $\mathbb{R}^n$

Definimos o ângulo entre vetores em dimensões maiores por

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$

Dimensões Maiores

A expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$ vale em $\mathbb{R}^n$

Definimos o ângulo entre vetores em dimensões maiores por

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$

desde que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$

Exemplo 1

Determine o ângulo entre os vetores

$$\vec{w} = (1, 1, 0) \quad \vec{v} = (1, 0, 1)$$

Exemplo 1 – Produto Escalar

Produto Escalar

Exemplo 1 – Produto Escalar

Produto Escalar

$$\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 1 – Produto Escalar

Produto Escalar

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (1, 1, 0) \cdot (1, 0, 1)$$

Exemplo 1 – Produto Escalar

Produto Escalar

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) \\ &= 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Produto Escalar

Produto Escalar

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) \\ &= 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Norma

Norma de $\vec{w}$

Exemplo 1 – Norma

Norma de $\vec{w}$

$$\|u\|$$

Exemplo 1 – Norma

Norma de $\vec{w}$

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Exemplo 1 – Norma

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Norma

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Norma

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Norma de $\vec{w}$

Exemplo 1 – Norma

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Norma de $\vec{w}$

$$\|v\|$$

Exemplo 1 – Norma

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Norma de $\vec{w}$

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Exemplo 1 – Norma

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|v\| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Norma

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|v\| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\cos(\theta)$$

Exemplo 1 – Solução

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Exemplo 2

Determine o ângulo entre os vetores de $\mathbb{R}^5$

$$\vec{w} = (1, 2, -1, 3, 0)$$

$$\vec{v} = (2, -1, 4, 0, 1)$$

Exemplo 2 – Produto Escalar

Produto escalar

Exemplo 2 – Produto Escalar

Produto escalar

$$\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 2 – Produto Escalar

Produto escalar

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (1, 2, -1, 3, 0) \cdot (2, -1, 4, 0, 1)$$

Exemplo 2 – Produto Escalar

Produto escalar

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, -1, 3, 0) \cdot (2, -1, 4, 0, 1) \\ &= 1 \times 2 + 2(-1) + (-1)4 + 3 \times 0 + 0 \times 1\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Produto Escalar

Produto escalar

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, -1, 3, 0) \cdot (2, -1, 4, 0, 1) \\ &= 1 \times 2 + 2(-1) + (-1)4 + 3 \times 0 + 0 \times 1 \\ &= 2 - 2 - 4 + 0 + 0\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Produto Escalar

Produto escalar

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, -1, 3, 0) \cdot (2, -1, 4, 0, 1) \\ &= 1 \times 2 + 2(-1) + (-1)4 + 3 \times 0 + 0 \times 1 \\ &= 2 - 2 - 4 + 0 + 0 \\ &= -4\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Normas

Norma de $\vec{w}$

Exemplo 2 – Normas

Norma de $\vec{w}$

$$\|\vec{w}\|$$

Exemplo 2 – Normas

Norma de $\vec{w}$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 0^2}$$

Exemplo 2 – Normas

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 1 + 9}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Normas

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 1 + 9} \\ &= \sqrt{15}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Normas

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 1 + 9} \\ &= \sqrt{15}\end{aligned}$$

Norma de $\vec{v}$

Exemplo 2 – Normas

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 1 + 9} \\ &= \sqrt{15}\end{aligned}$$

Norma de $\vec{v}$

$$\|\vec{v}\|$$

Exemplo 2 – Normas

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 1 + 9} \\ &= \sqrt{15}\end{aligned}$$

Norma de $\vec{v}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2 + 0^2 + 1^2}$$

Exemplo 2 – Normas

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 1 + 9} \\ &= \sqrt{15}\end{aligned}$$

Norma de $\vec{v}$

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{4 + 1 + 16 + 1}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Normas

Norma de $\vec{w}$

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 1 + 9} \\ &= \sqrt{15}\end{aligned}$$

Norma de $\vec{v}$

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{4 + 1 + 16 + 1} \\ &= \sqrt{22}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\cos \theta$$

Exemplo 2 – Solução

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-4}{\sqrt{15}\sqrt{22}}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-4}{\sqrt{15}\sqrt{22}} = -\frac{4}{\sqrt{330}}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-4}{\sqrt{15}\sqrt{22}} = -\frac{4}{\sqrt{330}}$$

θ

Exemplo 2 – Solução

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-4}{\sqrt{15}\sqrt{22}} = -\frac{4}{\sqrt{330}}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{330}}\right)$$

Exemplo 2 – Solução

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-4}{\sqrt{15}\sqrt{22}} = -\frac{4}{\sqrt{330}}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{330}}\right) \approx 1,79$$

Exemplo 2 – Solução

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-4}{\sqrt{15}\sqrt{22}} = -\frac{4}{\sqrt{330}}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{330}}\right) \approx 1,79 \approx 60,85^\circ$$

Conteúdo

Ângulo entre Vetores

Ortogonalidade

Ortogonalidade

Dois vetores não nulos são **ortogonais**

Ortogonalidade

Dois vetores não nulos são **ortogonais**

quando o ângulo entre eles é reto, $\theta = \frac{\pi}{2}$

Ortogonalidade

Dois vetores não nulos são **ortogonais**

quando o ângulo entre eles é reto, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\theta)$$

Ortogonalidade

Dois vetores não nulos são **ortogonais**

quando o ângulo entre eles é reto, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Ortogonalidade

Dois vetores não nulos são **ortogonais**

quando o ângulo entre eles é reto, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ortogonalidade

Dois vetores não nulos são **ortogonais**

quando o ângulo entre eles é reto, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Ortogonalidade

Dois vetores não nulos são **ortogonais**

quando o ângulo entre eles é reto, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

Ortogonalidade

Dois vetores não nulos são **ortogonais**

quando o ângulo entre eles é reto, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Ortogonalidade

Dois vetores não nulos são **ortogonais**

quando o ângulo entre eles é reto, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ortogonalidade

Dois vetores não nulos são **ortogonais**

quando o ângulo entre eles é reto, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Portanto

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Exemplo 3

Determine k para que os vetores

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sejam ortogonais

Exemplo 3

Determine k para que os vetores

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sejam ortogonais

Condição de ortogonalidade $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$1 \times 3 + k \times 2 + 2(-1) = 0$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$1 \times 3 + k \times 2 + 2(-1) = 0$$

$$3 + 2k - 2 = 0$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$1 \times 3 + k \times 2 + 2(-1) = 0$$

$$3 + 2k - 2 = 0$$

$$2k + 1 = 0$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$1 \times 3 + k \times 2 + 2(-1) = 0$$

$$3 + 2k - 2 = 0$$

$$2k + 1 = 0$$

$$k = -\frac{1}{2}$$