

Projeção Ortogonal

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Conteúdo

Decomposição de Vetores

Projeção Ortogonal

Distância

Decomposição de Vetores

Pode ser conveniente decompor o vetor em uma soma de vetores

Decomposição de Vetores

Pode ser conveniente decompor o vetor em uma soma de vetores

Por exemplo,

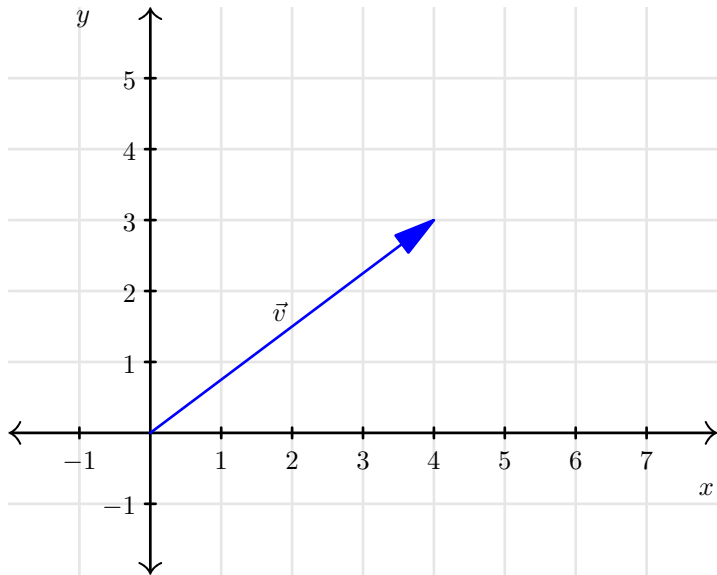
Decomposição de Vetores

Pode ser conveniente decompor o vetor em uma soma de vetores

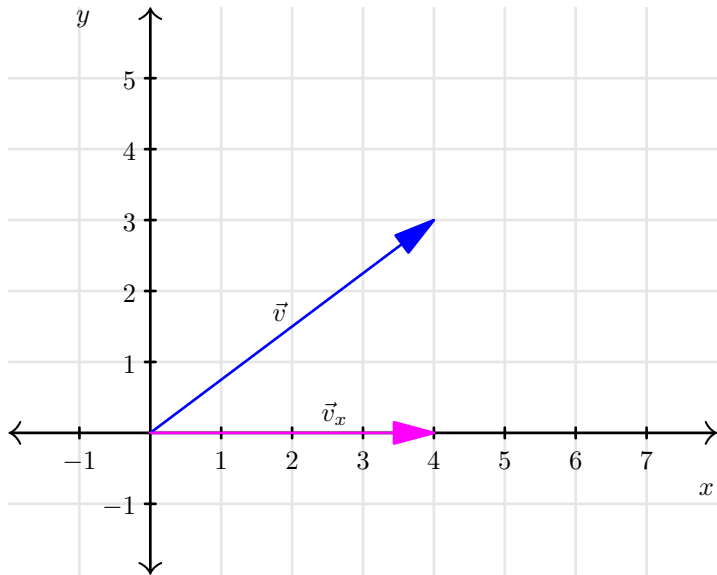
Por exemplo,

Podemos decompor qualquer vetor em vetores alinhados com os eixos do $\mathbb{R}^n$

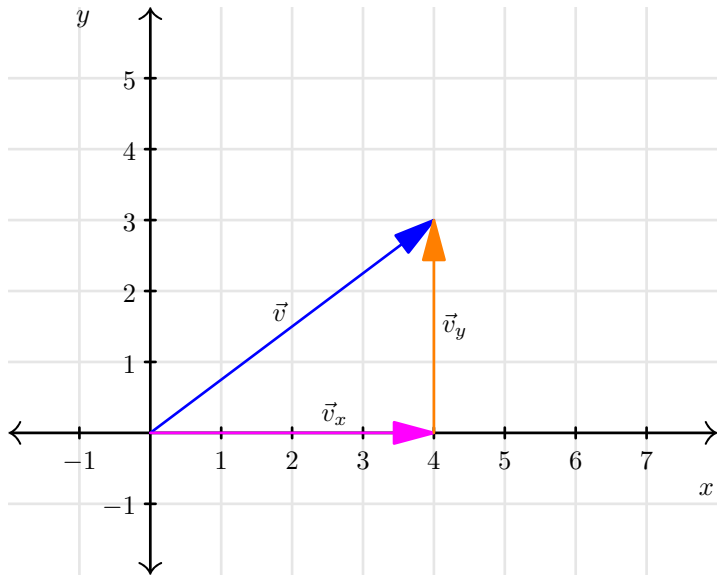
Decomposição de Vetores



Decomposição de Vetores



Decomposição de Vetores



Decomposição de Vetores

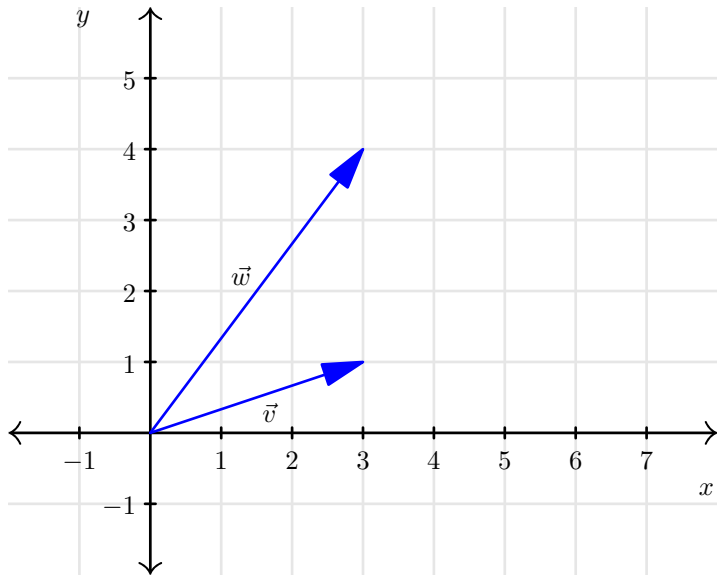
Muitas vezes precisamos decompor um vetor na direção de outro

Decomposição de Vetores

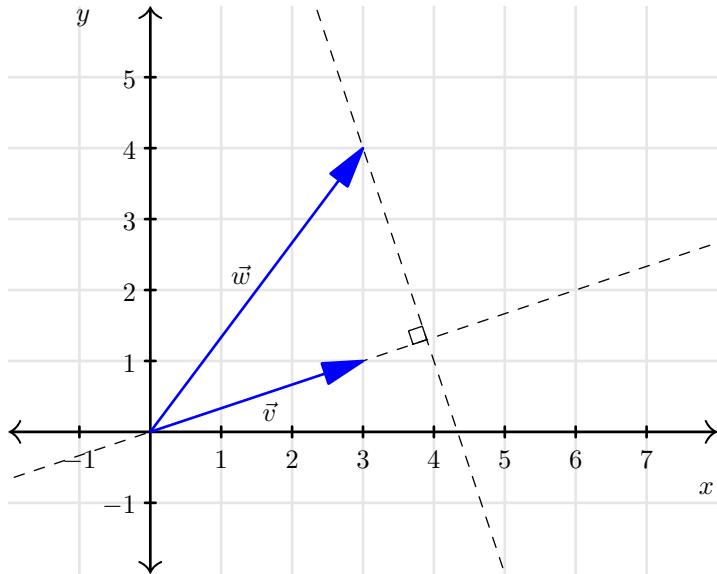
Muitas vezes precisamos decompor um vetor na direção de outro

Para isso precisamos da **projeção ortogonal** de um vetor em outro

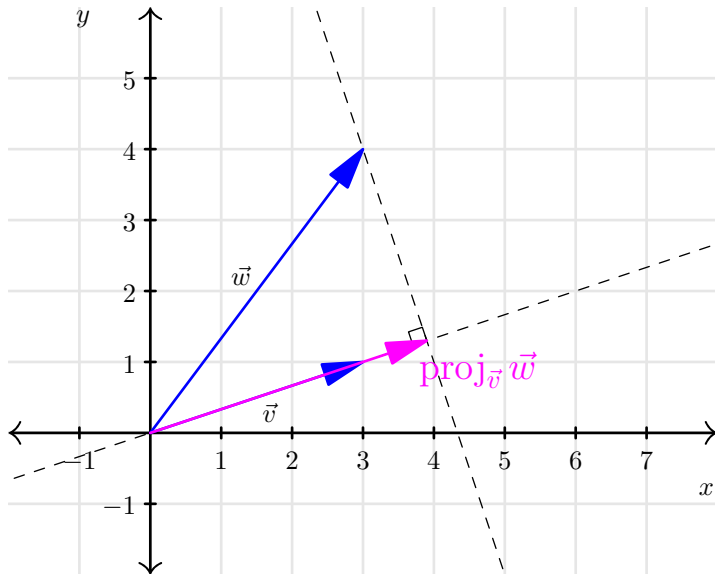
Decomposição Ortogonal



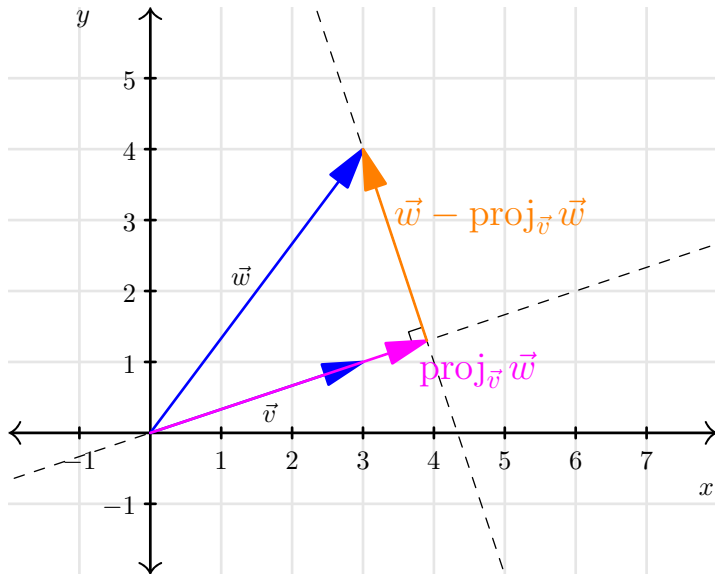
Decomposição Ortogonal



Decomposição Ortogonal



Decomposição Ortogonal



Conteúdo

Decomposição de Vetores

Projeção Ortogonal

Distância

Projeção ortogonal

Considere os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$

Projeção ortogonal

Considere os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$

Queremos determinar a componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$

Projeção ortogonal

Considere os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$

Queremos determinar a componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$

A **projeção ortogonal** de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

Projeção ortogonal

Considere os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$

Queremos determinar a componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$

A **projeção ortogonal** de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

é o vetor paralelo a $\vec{v}$

Projeção ortogonal

Considere os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$

Queremos determinar a componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$

A **projeção ortogonal** de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

é o vetor paralelo a $\vec{v}$

obtido ao projetar ortogonalmente $\vec{w}$

Projeção ortogonal

Considere os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$

Queremos determinar a componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$

A **projeção ortogonal** de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

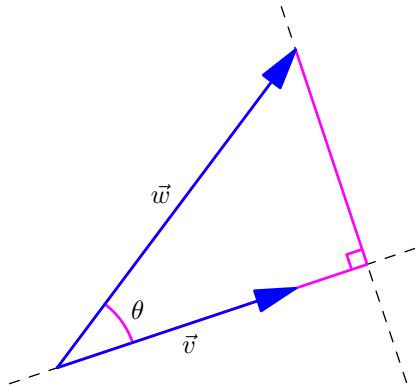
é o vetor paralelo a $\vec{v}$

obtido ao projetar ortogonalmente $\vec{w}$

sobre a reta determinada por $\vec{v}$

Projeção Vetorial

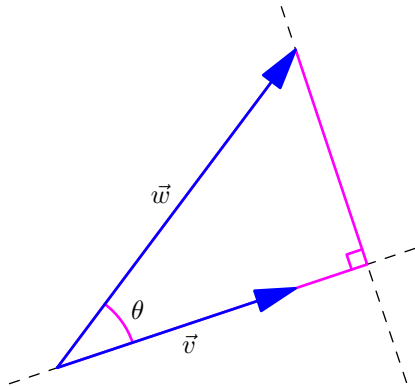
Se θ é o ângulo entre $\vec{w}$ e $\vec{v}$



Projeção Vetorial

Se θ é o ângulo entre $\vec{w}$ e $\vec{v}$

A componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$

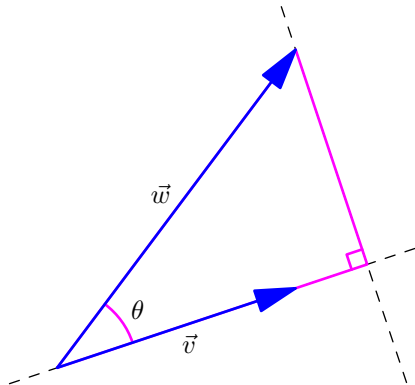


Projeção Vetorial

Se θ é o ângulo entre $\vec{w}$ e $\vec{v}$

A componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$
possui comprimento

$$\|\vec{w}\| \cos(\theta)$$



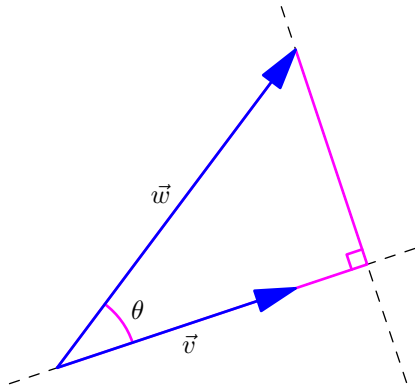
Projeção Vetorial

Se θ é o ângulo entre $\vec{w}$ e $\vec{v}$

A componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$
possui comprimento

$$\|\vec{w}\| \cos(\theta)$$

Do produto escalar temos



Projeção Vetorial

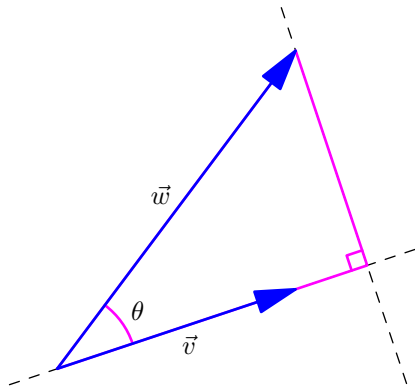
Se θ é o ângulo entre $\vec{w}$ e $\vec{v}$

A componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$
possui comprimento

$$\|\vec{w}\| \cos(\theta)$$

Do produto escalar temos

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{w}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$



Projeção Vetorial

Se θ é o ângulo entre $\vec{w}$ e $\vec{v}$

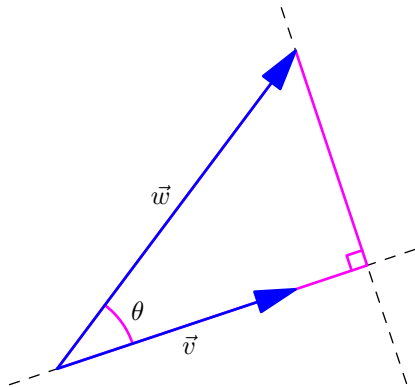
A componente de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$
possui comprimento

$$\|\vec{w}\| \cos(\theta)$$

Do produto escalar temos

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{w}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

$$\|\vec{w}\| \cos(\theta) = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$



Projeção Vetorial

Queremos agora um vetor na direção de $\vec{v}$,

Projeção Vetorial

Queremos agora um vetor na direção de $\vec{v}$, com comprimento $\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Projeção Vetorial

Queremos agora um vetor na direção de $\vec{v}$, com comprimento $\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Projeção Vetorial

Queremos agora um vetor na direção de $\vec{v}$, com comprimento $\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Portanto

Projeção Vetorial

Queremos agora um vetor na direção de $\vec{v}$, com comprimento $\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Portanto

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Projeção Vetorial

Queremos agora um vetor na direção de $\vec{v}$, com comprimento $\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Portanto

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Projeção Vetorial

Queremos agora um vetor na direção de $\vec{v}$, com comprimento $\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Portanto

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

Projeção Vetorial

Queremos agora um vetor na direção de $\vec{v}$, com comprimento $\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Portanto

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Projeção Vetorial

Queremos agora um vetor na direção de $\vec{v}$, com comprimento $\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Portanto

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

desde que $\vec{v} \neq \vec{0}$

Projeção Vetorial

Projeção do vetor $\vec{w}$ na direção do vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 1

Dados

$$\vec{w} = (3, 4) \quad \vec{v} = (1, 0)$$

Calcule a projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

Exemplo 1 – Solução

Queremos a projeção de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

Exemplo 1 – Solução

Queremos a projeção de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (1, 0)$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 0) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 0\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 0) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 0 \\ &= 3\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 0) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 0 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 0) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 0 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (1, 0) \cdot (1, 0)$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 0) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 0 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 0) \cdot (1, 0) \\ &= 1 \times 1 + 0 \times 0\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 0) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 0 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 0) \cdot (1, 0) \\ &= 1 \times 1 + 0 \times 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 0) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 0 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 0) \cdot (1, 0) \\ &= 1 \times 1 + 0 \times 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 0) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 0 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 0) \cdot (1, 0) \\ &= 1 \times 1 + 0 \times 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (1, 0)$$

$$= 3 \times 1 + 4 \times 0$$

$$= 3$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{3}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (1, 0) \cdot (1, 0)$$

$$= 1 \times 1 + 0 \times 0$$

$$= 1$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (1, 0)$$

$$= 3 \times 1 + 4 \times 0$$

$$= 3$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{3}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (1, 0) \cdot (1, 0)$$

$$= 1 \times 1 + 0 \times 0$$

$$= 1$$

Exemplo 2

Dados

$$\vec{w} = (3, 4) \quad \vec{v} = (2, 1)$$

Calcule a projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

Exemplo 2 – Solução

Queremos a projeção de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

Exemplo 2 – Solução

Queremos a projeção de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (2, 1)$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 6 + 4\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (2, 1) \cdot (2, 1)$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (2, 1) \cdot (2, 1) \\ &= 2^2 + 1^2\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (2, 1) \cdot (2, 1) \\ &= 2^2 + 1^2 \\ &= 4 + 1\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (2, 1) \cdot (2, 1) \\ &= 2^2 + 1^2 \\ &= 4 + 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (2, 1) \cdot (2, 1) \\ &= 2^2 + 1^2 \\ &= 4 + 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (2, 1) \cdot (2, 1) \\ &= 2^2 + 1^2 \\ &= 4 + 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (2, 1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{10}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (2, 1) \cdot (2, 1) \\ &= 2^2 + 1^2 \\ &= 4 + 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (2, 1)$$

$$= 3 \times 2 + 4 \times 1$$

$$= 6 + 4$$

$$= 10$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (2, 1) \cdot (2, 1)$$

$$= 2^2 + 1^2$$

$$= 4 + 1$$

$$= 5$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{10}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (2, 1)$$

$$= 3 \times 2 + 4 \times 1$$

$$= 6 + 4$$

$$= 10$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (2, 1) \cdot (2, 1)$$

$$= 2^2 + 1^2$$

$$= 4 + 1$$

$$= 5$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{10}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3

Dados

$$\vec{w} = (3, 4) \quad \vec{v} = (2, 1)$$

Calcule a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$

Exemplo 3

Dados

$$\vec{w} = (3, 4) \quad \vec{v} = (2, 1)$$

Calcule a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$

Atenção à ordem dos vetores

Exemplo 3 – Solução

Queremos a projeção de $\vec{v}$ em $\vec{w}$

Exemplo 3 – Solução

Queremos a projeção de $\vec{v}$ em $\vec{w}$

$$\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = (3, 4) \cdot (3, 4)$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{w} &= (3, 4) \cdot (3, 4) \\ &= 3^2 + 4^2\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{w} &= (3, 4) \cdot (3, 4) \\ &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = (3, 4) \cdot (3, 4)$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = (3, 4) \cdot (3, 4)$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

$$\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = (3, 4) \cdot (3, 4)$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

$$\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = (3, 4) \cdot (3, 4)$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

$$\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{10}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = (3, 4) \cdot (3, 4)$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

$$\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{10}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 10$$

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = (3, 4) \cdot (3, 4)$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

$$\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{10}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Decomposição Ortogonal

Um vetor $\vec{w}$ pode ser decomposto em duas componentes

Decomposição Ortogonal

Um vetor $\vec{w}$ pode ser decomposto em duas componentes

$\vec{w}$

Decomposição Ortogonal

Um vetor $\vec{w}$ pode ser decomposto em duas componentes

$$\vec{w} = \vec{w}_{//} + \vec{w}_{\perp}$$

Decomposição Ortogonal

Um vetor $\vec{w}$ pode ser decomposto em duas componentes

$$\vec{w} = \vec{w}_{//} + \vec{w}_{\perp}$$

onde

Decomposição Ortogonal

Um vetor $\vec{w}$ pode ser decomposto em duas componentes

$$\vec{w} = \vec{w}_{//} + \vec{w}_{\perp}$$

onde

$$\vec{w}_{//} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Decomposição Ortogonal

Um vetor $\vec{w}$ pode ser decomposto em duas componentes

$$\vec{w} = \vec{w}_{//} + \vec{w}_{\perp}$$

onde

$$\vec{w}_{//} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \vec{w}_{//}$$

Decomposição Ortogonal

Um vetor $\vec{w}$ pode ser decomposto em duas componentes

$$\vec{w} = \vec{w}_{//} + \vec{w}_{\perp}$$

onde

$$\vec{w}_{//} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

$\vec{w}_{//}$ é paralelo a $\vec{v}$

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \vec{w}_{//}$$

Decomposição Ortogonal

Um vetor $\vec{w}$ pode ser decomposto em duas componentes

$$\vec{w} = \vec{w}_{//} + \vec{w}_{\perp}$$

onde

$$\vec{w}_{//} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

$\vec{w}_{//}$ é paralelo a $\vec{v}$

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \vec{w}_{//}$$

$\vec{w}_{\perp}$ é ortogonal a $\vec{v}$

Exemplo 4

Dados

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determine a componente de $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{v}$

Exemplo 4 – Solução

Queremos a **componente perpendicular** de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

Exemplo 4 – Solução

Queremos a **componente perpendicular** de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \vec{w} - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \times 1 + 2 \times 2$$

$$= 5 + 4$$

$$= 9$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Projeção Ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Componente Perpendicular

$$\vec{w}_{\perp}$$

Exemplo 4 – Componente Perpendicular

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Exemplo 4 – Componente Perpendicular

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\perp} &= \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Componente Perpendicular

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\perp} &= \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{9}{5} \\ 2 - \frac{18}{5} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Componente Perpendicular

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\perp} &= \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{9}{5} \\ 2 - \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 \times 5}{5} - \frac{9}{5} \\ \frac{2 \times 5}{5} - \frac{18}{5} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Componente Perpendicular

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\perp} &= \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{9}{5} \\ 2 - \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 \times 5}{5} - \frac{9}{5} \\ \frac{2 \times 5}{5} - \frac{18}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{25 - 9}{5} \\ \frac{10 - 18}{5} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Componente Perpendicular

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\perp} &= \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{9}{5} \\ 2 - \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 \times 5}{5} - \frac{9}{5} \\ \frac{2 \times 5}{5} - \frac{18}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{25 - 9}{5} \\ \frac{10 - 18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{-8}{5} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Componente Perpendicular

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\perp} &= \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} \\&= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{9}{5} \\ 2 - \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 \times 5}{5} - \frac{9}{5} \\ \frac{2 \times 5}{5} - \frac{18}{5} \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \frac{25 - 9}{5} \\ \frac{10 - 18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{-8}{5} \end{pmatrix} = -\frac{8}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 5

Dados

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determine

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2$$

$$= 2 - 2 + 6 = 6$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 + 2^2\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 + 4\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 + 4 = 9\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 + 4 = 9\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 + 4 = 9\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 + 4 = 9\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{6}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 + 4 = 9\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{6}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + (-1)2 + 3 \times 2 \\ &= 2 - 2 + 6 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 + 4 = 9\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{6}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 6

Dados

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determine a decomposição

$$\vec{w} = \vec{w}_{//} + \vec{w}_{\perp}$$

Exemplo 6 – Solução

Do exercício anterior temos

Exemplo 6 – Solução

Do exercício anterior temos

$$\vec{w}_{//}$$

Exemplo 6 – Solução

Do exercício anterior temos

$$\vec{w}_{//} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Exemplo 6 – Solução

Do exercício anterior temos

$$\vec{w}_{//} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\vec{w}_{\perp}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \vec{w}_{\parallel}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \vec{w}_{//} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \vec{w}_{//} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{3} \\ -1 - \frac{4}{3} \\ 3 - \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\perp} &= \vec{w} - \vec{w}_{//} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{3} \\ -1 - \frac{4}{3} \\ 3 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6-2}{3} \\ \frac{-3-4}{3} \\ \frac{9-4}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w}_{\perp} &= \vec{w} - \vec{w}_{//} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{3} \\ -1 - \frac{4}{3} \\ 3 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6-2}{3} \\ \frac{-3-4}{3} \\ \frac{9-4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 7

Determine a projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$

$$\vec{w} = (1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\vec{v} = (2, 0, 1, -1, 2)$$

Exemplo 7 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 1, -1, 2)$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4(-1) + 5 \times 2\end{aligned}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4(-1) + 5 \times 2 \\ &= 2 + 0 + 3 - 4 + 10\end{aligned}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4(-1) + 5 \times 2 \\ &= 2 + 0 + 3 - 4 + 10 = 11\end{aligned}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4(-1) + 5 \times 2 \\ &= 2 + 0 + 3 - 4 + 10 = 11\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4(-1) + 5 \times 2 \\ &= 2 + 0 + 3 - 4 + 10 = 11\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (2, 0, 1, -1, 2) \cdot (2, 0, 1, -1, 2)$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4(-1) + 5 \times 2 \\ &= 2 + 0 + 3 - 4 + 10 = 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (2, 0, 1, -1, 2) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 2^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2^2\end{aligned}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4(-1) + 5 \times 2 \\ &= 2 + 0 + 3 - 4 + 10 = 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (2, 0, 1, -1, 2) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 2^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2^2 \\ &= 4 + 0 + 1 + 1 + 4\end{aligned}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (1, 2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4(-1) + 5 \times 2 \\ &= 2 + 0 + 3 - 4 + 10 = 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (2, 0, 1, -1, 2) \cdot (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= 2^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2^2 \\ &= 4 + 0 + 1 + 1 + 4 = 10\end{aligned}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} &= \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} \\ &= \frac{11}{10} (2, 0, 1, -1, 2)\end{aligned}$$

Exemplo 7 – Solução

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} &= \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} \\ &= \frac{11}{10} (2, 0, 1, -1, 2) \\ &= \left(\frac{11}{5}, 0, \frac{11}{10}, -\frac{11}{10}, \frac{11}{5} \right)\end{aligned}$$

Exemplo 8

Uma força é representada pelo vetor

$$\vec{F} = (6, -2, 3)$$

e atua sobre um objeto que se desloca na direção

$$\vec{d} = (2, 1, 2)$$

Determine as componentes da força paralela e perpendicular à direção $\vec{d}$

Exemplo 8 – Solução

$$\vec{F} \cdot \vec{d}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\vec{F} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 6 \times 2 + (-2)1 + 3 \times 2\end{aligned}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 6 \times 2 + (-2)1 + 3 \times 2 \\ &= 12 - 2 + 6\end{aligned}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 6 \times 2 + (-2)1 + 3 \times 2 \\ &= 12 - 2 + 6 \\ &= 16\end{aligned}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\vec{F} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 6 \times 2 + (-2)1 + 3 \times 2$$

$$= 12 - 2 + 6$$

$$= 16$$

$$\vec{d} \cdot \vec{d}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 6 \times 2 + (-2)1 + 3 \times 2 \\ &= 12 - 2 + 6 \\ &= 16\end{aligned}$$

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 6 \times 2 + (-2)1 + 3 \times 2 \\ &= 12 - 2 + 6 \\ &= 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{d} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2^2 + 1^2 + 2^2\end{aligned}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 6 \times 2 + (-2)1 + 3 \times 2 \\ &= 12 - 2 + 6 \\ &= 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{d} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2^2 + 1^2 + 2^2 \\ &= 4 + 1 + 4\end{aligned}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 6 \times 2 + (-2)1 + 3 \times 2 \\ &= 12 - 2 + 6 \\ &= 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{d} \cdot \vec{d} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2^2 + 1^2 + 2^2 \\ &= 4 + 1 + 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\text{proj}_{\vec{d}} \vec{F}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\text{proj}_{\vec{d}} \vec{F} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \vec{d}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\text{proj}_{\vec{d}} \vec{F} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \vec{d} = \frac{16}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\text{proj}_{\vec{d}} \vec{F} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \vec{d} = \frac{16}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16 \times 2}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{16 \times 2}{9} \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Solução

$$\text{proj}_{\vec{d}} \vec{F} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \vec{d} = \frac{16}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16 \times 2}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{16 \times 2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{32}{9} \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Solução

A componente paralela da força é

$$\vec{F}_{//} = \text{proj}_{\vec{d}} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{32}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{32}{9} \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Solução

A componente perpendicular é

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{//} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{32}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{32}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6 \times 9 - 32}{9} \\ \frac{-2 \times 9 - 16}{9} \\ \frac{3 \times 9 - 32}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{9} \\ -\frac{34}{9} \\ -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Conteúdo

Decomposição de Vetores

Projeção Ortogonal

Distância

Projeção e Distância

A componente perpendicular da decomposição

Projeção e Distância

A componente perpendicular da decomposição

$$\vec{w}_{\perp}$$

Projeção e Distância

A componente perpendicular da decomposição

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Projeção e Distância

A componente perpendicular da decomposição

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

é ortogonal a $\vec{v}$

Projeção e Distância

A componente perpendicular da decomposição

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

é ortogonal a $\vec{v}$

Sua norma é a distância entre o ponto, P , final de $\vec{u}$

Projeção e Distância

A componente perpendicular da decomposição

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

é ortogonal a $\vec{v}$

Sua norma é a distância entre o ponto, P , final de $\vec{u}$

e a reta, r , que contém o vetor $\vec{v}$

Projeção e Distância

A componente perpendicular da decomposição

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

é ortogonal a $\vec{v}$

Sua norma é a distância entre o ponto, P , final de $\vec{u}$

e a reta, r , que contém o vetor $\vec{v}$

$$\text{dist}(P, r)$$

Projeção e Distância

A componente perpendicular da decomposição

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

é ortogonal a $\vec{v}$

Sua norma é a distância entre o ponto, P , final de $\vec{u}$

e a reta, r , que contém o vetor $\vec{v}$

$$\text{dist}(P, r) = \|\vec{w}_{\perp}\|$$

Projeção e Distância

A componente perpendicular da decomposição

$$\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

é ortogonal a $\vec{v}$

Sua norma é a distância entre o ponto, P , final de $\vec{u}$

e a reta, r , que contém o vetor $\vec{v}$

$$\text{dist}(P, r) = \|\vec{w}_{\perp}\| = \|\vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}\|$$

Exemplo 9

Determine a distância entre a extremidade de

$$\vec{w} = (3, 4)$$

e a reta determinada por

$$\vec{v} = (1, 2)$$

Exemplo 9 – Solução

A distância é a norma da componente perpendicular da projeção de $\vec{w}$ em $\vec{v}$

$$\text{dist} = \|w_{\perp}\| = \|w - w_{\parallel}\| = \|w - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}\|$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\vec{w} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (1, 2)$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2\end{aligned}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4\end{aligned}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (1, 2)$$

$$= 3 \times 1 + 4 \times 2$$

$$= 3 + 4$$

$$= 7$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (1, 2) \cdot (1, 2)$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 2) \cdot (1, 2) \\ &= 1^2 + 2^2\end{aligned}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 2) \cdot (1, 2) \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4\end{aligned}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 2) \cdot (1, 2) \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 2) \cdot (1, 2) \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 2) \cdot (1, 2) \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 2) \cdot (1, 2) \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Projeção

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{v} &= (3, 4) \cdot (1, 2) \\ &= 3 \times 1 + 4 \times 2 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &= (1, 2) \cdot (1, 2) \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Componente Perpendicular

$$\begin{aligned}w_{\perp} &= w - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \times 5 - 7}{5} \\ \frac{4 \times 10 - 7}{10} \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \frac{15 - 7}{5} \\ \frac{40 - 7}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{33}{10} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 9 – Distância

$$\text{dist} = \|w_{\perp}\| = \|w - w_{//}\| = \|w - \text{proj}_{\vec{v}} w\|$$