

Volume do Paralelepípedo

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

Três Vetores Determinam um Paralelepípedo

Três vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ com mesma origem

Três Vetores Determinam um Paralelepípedo

Três vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ com mesma origem

Determinam um paralelepípedo no espaço $\mathbb{R}^3$

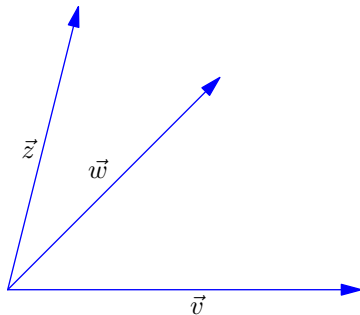
Três Vetores Determinam um Paralelepípedo

Três vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ com mesma origem

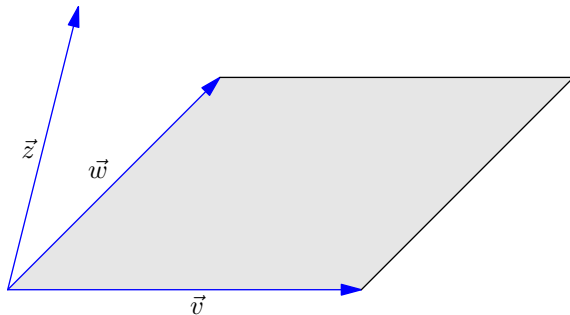
Determinam um paralelepípedo no espaço $\mathbb{R}^3$

Qual o volume desse paralelepípedo?

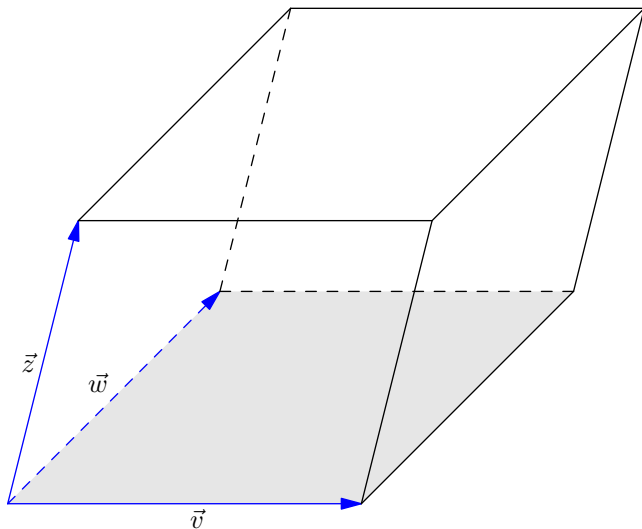
Três Vetores Determinam um Paralelepípedo



Três Vetores Determinam um Paralelepípedo



Três Vetores Determinam um Paralelepípedo



Volume do paralelepípedo

Volume

Volume do paralelepípedo

$$\text{Volume} = \text{Área da Base} \times \text{Altura}$$

Volume

Volume do paralelepípedo

$$\text{Volume} = \text{Área da Base} \times \text{Altura}$$

$$V = Ah$$

Volume

Volume do paralelepípedo

$$\text{Volume} = \text{Área da Base} \times \text{Altura}$$

$$V = Ah$$

A área da base é

Volume

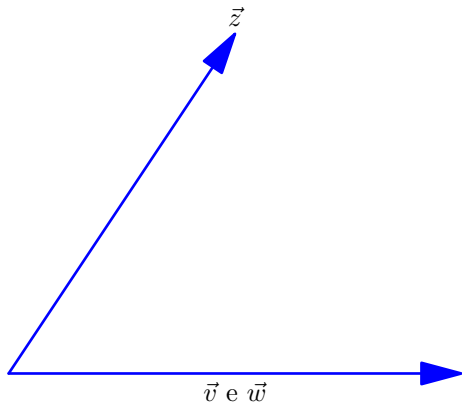
Volume do paralelepípedo

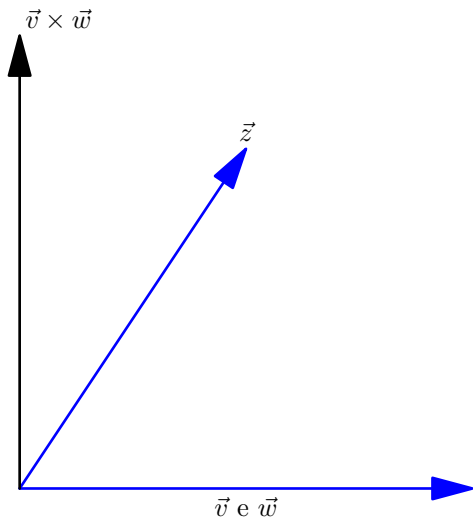
$$\text{Volume} = \text{Área da Base} \times \text{Altura}$$

$$V = Ah$$

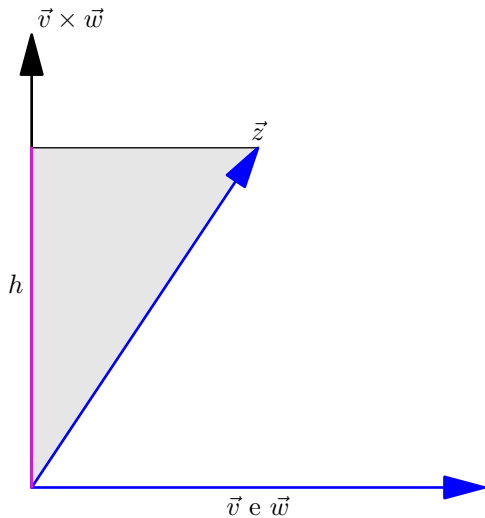
A área da base é

$$A = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$$

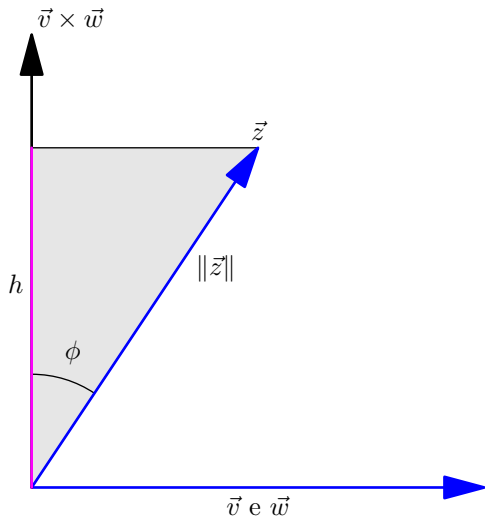




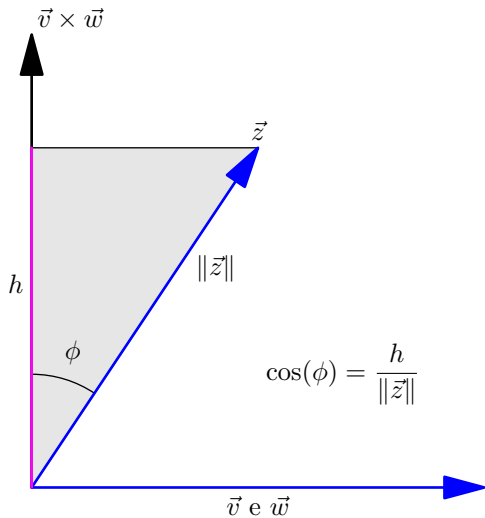
Altura



Altura



Altura



Altura

Se ϕ é o ângulo entre $\vec{z}$ e o vetor normal à base, a altura é

$$h = \|\vec{z}\| |\cos(\phi)|$$

Volume

Volume

$$V = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{z}\| |\cos(\phi)|$$

Volume

Volume

$$V = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{z}\| |\cos(\phi)|$$

Comparando com o produto escalar

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \|\vec{p}\| \|\vec{q}\| \cos(\theta)$$

Volume

Volume

$$V = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{z}\| |\cos(\phi)|$$

Comparando com o produto escalar

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \|\vec{p}\| \|\vec{q}\| \cos(\theta)$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{z}\| \cos(\phi)$$

Volume

Volume

$$V = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{z}\| |\cos(\phi)|$$

Comparando com o produto escalar

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \|\vec{p}\| \|\vec{q}\| \cos(\theta)$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{z}\| \cos(\phi)$$

$$V = |(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}|$$

Volume do Paralelepípedo

Dados três vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ com mesma origem

Volume do Paralelepípedo

Dados três vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ com mesma origem

O volume do paralelepípedo é

$$V = |(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}|$$

Volume do Paralelepípedo

Dados três vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ com mesma origem

O volume do paralelepípedo é

$$V = |(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}|$$

O valor absoluto é necessário porque volume é uma grandeza não negativa

Exemplo 1

Determine o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

Exemplo 1 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 1 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 1 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 10$$

Exemplo 1 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 10$$

$$= -13$$

Exemplo 1 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

V

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 10$$

$$= -13$$

Exemplo 1 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 10$$

$$= -13$$

$$V = |p|$$

Exemplo 1 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 10$$

$$= -13$$

$$V = |p| = |-13|$$

Exemplo 1 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 10$$

$$= -13$$

$$V = |p| = |-13| = 13$$

Exemplo 2

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z}$$

Exemplo 2 – Resolução

$$p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exemplo 2 – Resolução

$$\begin{aligned} p = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Resolução

$$\begin{aligned} p &= (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(4 - 1) - (6 + 1) + (-3 - 2) \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Resolução

$$\begin{aligned} p &= (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(4 - 1) - (6 + 1) + (-3 - 2) \\ &= 2 \times 3 - 7 - 5 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Resolução

$$\begin{aligned} p &= (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(4 - 1) - (6 + 1) + (-3 - 2) \\ &= 2 \times 3 - 7 - 5 = -6 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Resolução

$$\begin{aligned} p &= (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(4 - 1) - (6 + 1) + (-3 - 2) \\ &= 2 \times 3 - 7 - 5 = -6 \end{aligned}$$

V

Exemplo 2 – Resolução

$$\begin{aligned} p &= (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(4 - 1) - (6 + 1) + (-3 - 2) \\ &= 2 \times 3 - 7 - 5 = -6 \end{aligned}$$

$$V = |p|$$

Exemplo 2 – Resolução

$$\begin{aligned} p &= (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(4 - 1) - (6 + 1) + (-3 - 2) \\ &= 2 \times 3 - 7 - 5 = -6 \end{aligned}$$

$$V = |p| = |-6|$$

Exemplo 2 – Resolução

$$\begin{aligned} p &= (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(4 - 1) - (6 + 1) + (-3 - 2) \\ &= 2 \times 3 - 7 - 5 = -6 \end{aligned}$$

$$V = |p| = |-6| = 6$$

Exemplo 3

Considere os pontos

$$A = (1, 1, 0)$$

$$B = (3, 2, 1)$$

$$C = (2, 4, 1)$$

$$D = (1, 1, 3)$$

Determine o volume do paralelepípedo que possui A como vértice e é determinado pelos vetores

$$\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{AD}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$\overrightarrow{AB}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Exemplo 3 – Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A$$

Exemplo 3 – Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A$$

Exemplo 3 – Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Resolução

p

Exemplo 3 – Resolução

$$p = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$p = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$p = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$p = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(6 - 1)$$

Exemplo 3 – Resolução

$$p = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(6 - 1)$$

$$= 15$$

Exemplo 3 – Resolução

$$p = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

V

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(6 - 1)$$

$$= 15$$

Exemplo 3 – Resolução

$$p = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$V = |p|$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(6 - 1)$$

$$= 15$$

Exemplo 3 – Resolução

$$p = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(6 - 1)$$

$$= 15$$

$$V = |p| = |15|$$

Exemplo 3 – Resolução

$$p = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(6 - 1)$$

$$= 15$$

$$V = |p| = |15| = 15$$