

Posições Relativas de Retas

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



<https://material-didatico.github.io/pages/gaal>

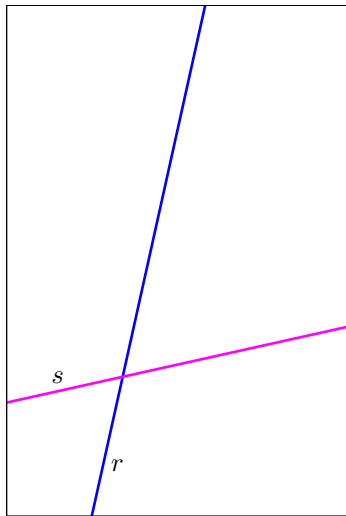
Conteúdo

Posições Relativas no Plano

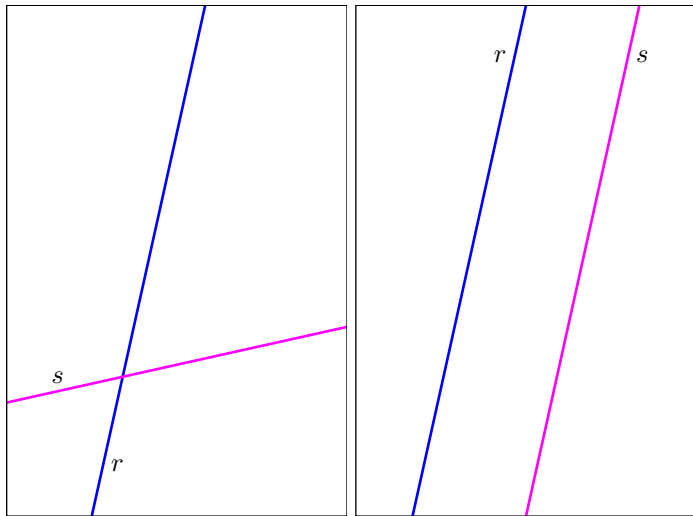
Posições Relativas no Espaço

Procedimento Geral

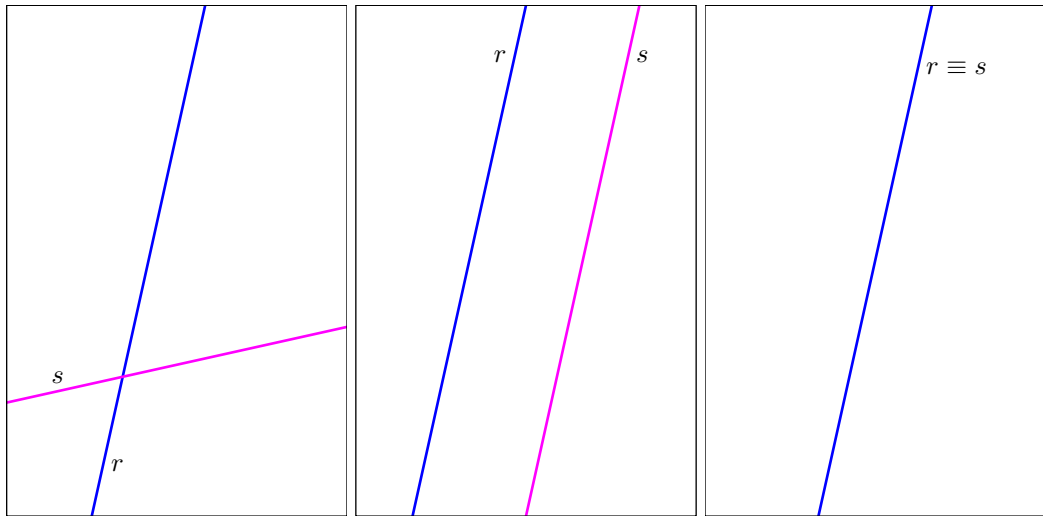
Posições Relativas no Plano



Posições Relativas no Plano



Posições Relativas no Plano



Posições Relativas entre Duas Retas no Plano

No plano, duas retas podem ser

Posições Relativas entre Duas Retas no Plano

No plano, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes

Posições Relativas entre Duas Retas no Plano

No plano, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto

Posições Relativas entre Duas Retas no Plano

No plano, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas

Posições Relativas entre Duas Retas no Plano

No plano, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — não se tocam

Posições Relativas entre Duas Retas no Plano

No plano, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — não se tocam
- ▶ coincidentes

Posições Relativas entre Duas Retas no Plano

No plano, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — não se tocam
- ▶ coincidentes — são a mesma reta

Determinando a Posição Relativa entre Duas Retas no Plano

Dadas duas retas

$$r: \vec{r} = \vec{p} + t \vec{v}$$

$$s: \vec{r} = \vec{q} + \tau \vec{w}$$

Determinando a Posição Relativa entre Duas Retas no Plano

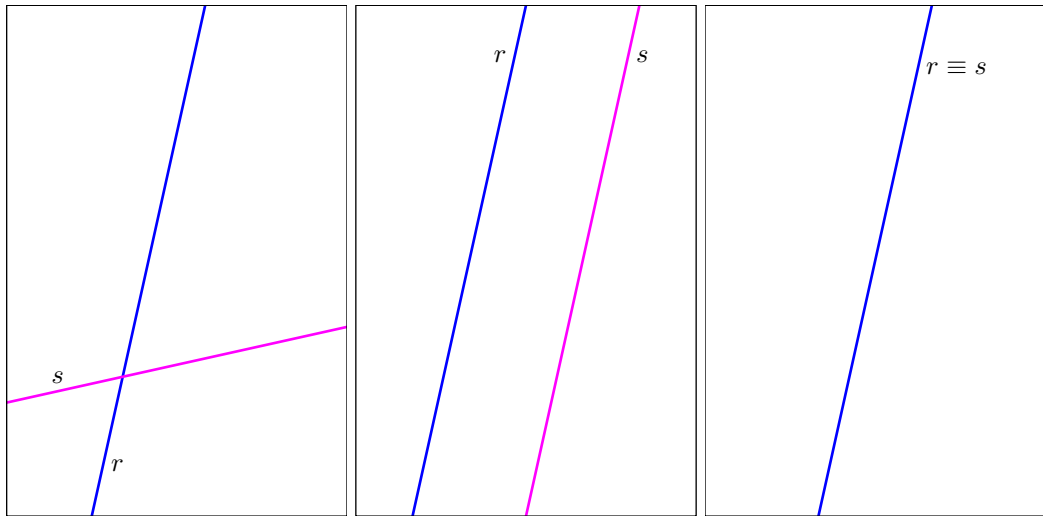
Dadas duas retas

$$r: \vec{r} = \vec{p} + t \vec{v}$$

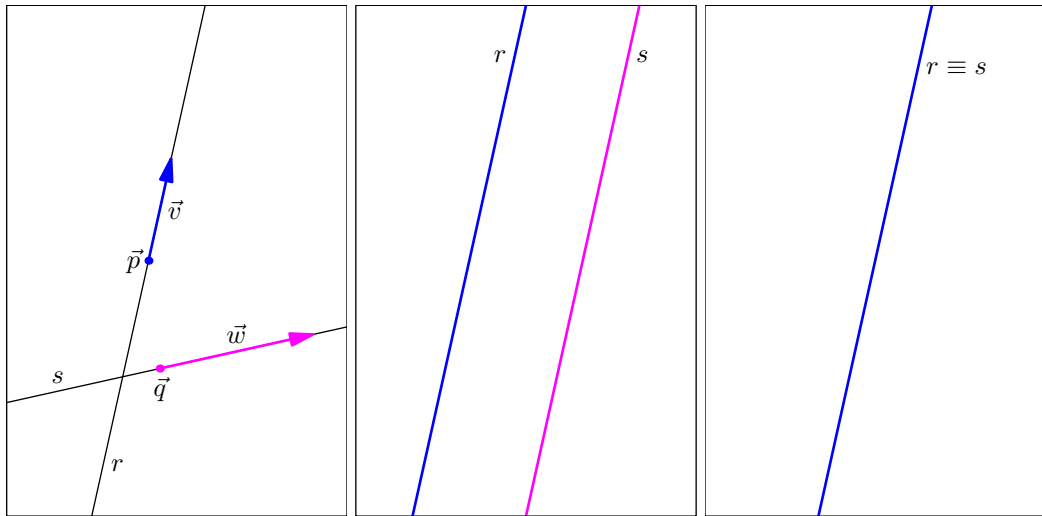
$$s: \vec{r} = \vec{q} + \tau \vec{w}$$

Analisamos os vetores diretores $\vec{v}$ e $\vec{w}$

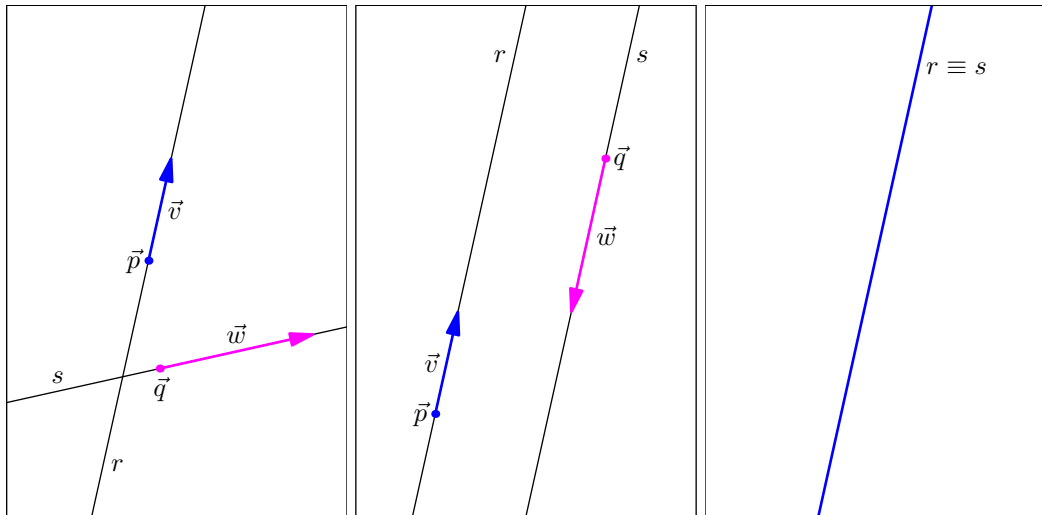
Posições Relativas



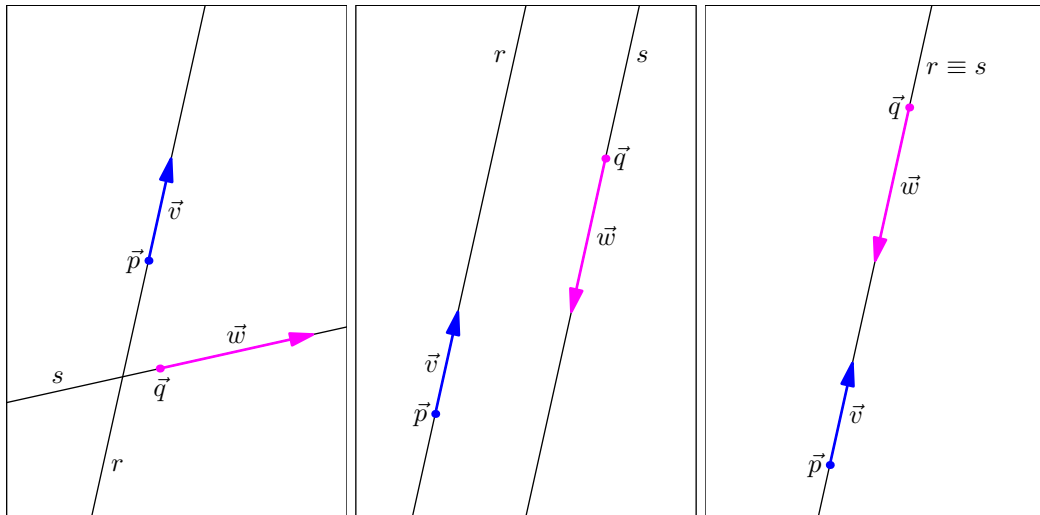
Posições Relativas



Posições Relativas



Posições Relativas



Retas Paralelas no Plano

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são paralelos,

Retas Paralelas no Plano

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são paralelos, as retas são concorrentes

Retas Paralelas no Plano

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ **não** são paralelos, as retas são **concorrentes**

Se os vetores são **paralelos**,

Retas Paralelas no Plano

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ **não** são paralelos, as retas são **concorrentes**

Se os vetores são **paralelos**, i.e., existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{w} = \alpha \vec{v}$$

Retas Paralelas no Plano

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ **não** são paralelos, as retas são **concorrentes**

Se os vetores são **paralelos**, i.e., existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{w} = \alpha \vec{v}$$

as retas são

Retas Paralelas no Plano

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ **não** são paralelos, as retas são **concorrentes**

Se os vetores são **paralelos**, i.e., existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{w} = \alpha \vec{v}$$

as retas são

► **coincidentes**,

Retas Paralelas no Plano

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ **não** são paralelos, as retas são **concorrentes**

Se os vetores são **paralelos**, i.e., existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{w} = \alpha \vec{v}$$

as retas são

► **coincidentes**, se possuem um ponto em comum

Retas Paralelas no Plano

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ **não** são paralelos, as retas são **concorrentes**

Se os vetores são **paralelos**, i.e., existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{w} = \alpha \vec{v}$$

as retas são

- ▶ **coincidentes**, se possuem um ponto em comum
- ▶ **paralelas distintas**, caso contrário

Exemplo 1

Determine a posição relativa entre as retas r e s

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = -2 + 4\tau \\ y = 5 - 2\tau \end{cases}$$

Exemplo 1 – Solução

Os vetores diretores são

Exemplo 1 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (2, -1)$$

Exemplo 1 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (2, -1)$$

$$\vec{w} = (4, -2)$$

Exemplo 1 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (2, -1)$$

$$\vec{w} = (4, -2)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

Exemplo 1 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (2, -1)$$

$$\vec{w} = (4, -2)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

os vetores são paralelos

Exemplo 1 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (2, -1)$$

$$\vec{w} = (4, -2)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

os vetores são paralelos

Então as retas são paralelas distintas ou coincidentes

Exemplo 1 – Solução

Igualando as coordenadas,

Exemplo 1 – Solução

Igualando as coordenadas, temos o sistema

$$\begin{cases} 1 + 2t = -2 + 4\tau \\ 3 - t = 5 - 2\tau \end{cases}$$

Exemplo 1 – Solução

Igualando as coordenadas, temos o sistema

$$\begin{cases} 1 + 2t = -2 + 4\tau \\ 3 - t = 5 - 2\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 4\tau = -3 \\ -t + 2\tau = 2 \end{cases}$$

Exemplo 1 – Solução

Igualando as coordenadas, temos o sistema

$$\begin{cases} 1 + 2t = -2 + 4\tau \\ 3 - t = 5 - 2\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 4\tau = -3 \\ -t + 2\tau = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 4\tau = -3 \\ 2t - 4\tau = -4 \end{cases}$$

Exemplo 1 – Solução

Igualando as coordenadas, temos o sistema

$$\begin{cases} 1 + 2t = -2 + 4\tau \\ 3 - t = 5 - 2\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 4\tau = -3 \\ -t + 2\tau = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 4\tau = -3 \\ 2t - 4\tau = -4 \end{cases}$$

As equações são incompatíveis,

Exemplo 1 – Solução

Igualando as coordenadas, temos o sistema

$$\begin{cases} 1 + 2t = -2 + 4\tau \\ 3 - t = 5 - 2\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 4\tau = -3 \\ -t + 2\tau = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 4\tau = -3 \\ 2t - 4\tau = -4 \end{cases}$$

As equações são incompatíveis, portanto, as retas são paralelas distintas

Exemplo 1 – Solução Alternativa

Se as retas são coincidentes todos os pontos em r também estão em s

Exemplo 1 – Solução Alternativa

Se as retas são coincidentes todos os pontos em r também estão em s

Escolhemos o ponto associado a $t = 0$ na reta r

Exemplo 1 – Solução Alternativa

Se as retas são coincidentes todos os pontos em r também estão em s

Escolhemos o ponto associado a $t = 0$ na reta r

$$(x, y) = (1, 3)$$

Exemplo 1 – Solução Alternativa

Se as retas são coincidentes todos os pontos em r também estão em s

Escolhemos o ponto associado a $t = 0$ na reta r

$$(x, y) = (1, 3)$$

Substituindo nas equações da reta s temos

Exemplo 1 – Solução Alternativa

Se as retas são coincidentes todos os pontos em r também estão em s

Escolhemos o ponto associado a $t = 0$ na reta r

$$(x, y) = (1, 3)$$

Substituindo nas equações da reta s temos

$$\begin{cases} 1 = -2 + 4\tau \\ 3 = 5 - 2\tau \end{cases}$$

Exemplo 1 – Solução Alternativa

Se as retas são coincidentes todos os pontos em r também estão em s

Escolhemos o ponto associado a $t = 0$ na reta r

$$(x, y) = (1, 3)$$

Substituindo nas equações da reta s temos

$$\begin{cases} 1 = -2 + 4\tau \\ 3 = 5 - 2\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\tau = 3 \\ 2\tau = -2 \end{cases}$$

Exemplo 1 – Solução Alternativa

Se as retas são coincidentes todos os pontos em r também estão em s

Escolhemos o ponto associado a $t = 0$ na reta r

$$(x, y) = (1, 3)$$

Substituindo nas equações da reta s temos

$$\begin{cases} 1 = -2 + 4\tau \\ 3 = 5 - 2\tau \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau = 3/4 \\ \tau = -2/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\tau = 3 \\ 2\tau = -2 \end{cases}$$

Exemplo 1 – Solução Alternativa

Se as retas são coincidentes todos os pontos em r também estão em s

Escolhemos o ponto associado a $t = 0$ na reta r

$$(x, y) = (1, 3)$$

Substituindo nas equações da reta s temos

$$\begin{cases} 1 = -2 + 4\tau \\ 3 = 5 - 2\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau = 3/4 \\ \tau = -2/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\tau = 3 \\ 2\tau = -2 \end{cases}$$

As equações são incompatíveis,

Exemplo 1 – Solução Alternativa

Se as retas são coincidentes todos os pontos em r também estão em s

Escolhemos o ponto associado a $t = 0$ na reta r

$$(x, y) = (1, 3)$$

Substituindo nas equações da reta s temos

$$\begin{cases} 1 = -2 + 4\tau \\ 3 = 5 - 2\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau = 3/4 \\ \tau = -2/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\tau = 3 \\ 2\tau = -2 \end{cases}$$

As equações são incompatíveis,
portanto, as retas são paralelas distintas

Exemplo 2

Determine a posição relativa e o ponto de interseção, caso exista,

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 - \tau \\ y = 8 - 3\tau \end{cases}$$

Exemplo 2 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2)$$

$$\vec{w} = (-1, -3)$$

Exemplo 2 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2)$$

$$\vec{w} = (-1, -3)$$

Eles não são paralelos

Exemplo 2 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2)$$

$$\vec{w} = (-1, -3)$$

Eles não são paralelos

Portanto, no plano, as retas são concorrentes

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

$$\tau = 0$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$t = 3 - \tau$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

$$\tau = 0$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$t = 3 - \tau = 3$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

$$\tau = 0$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$t = 3 - \tau = 3$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

Substituindo na reta s

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

$$\tau = 0$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$t = 3 - \tau = 3$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

Substituindo na reta s

$$x = 4 - \tau$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

$$\tau = 0$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$t = 3 - \tau = 3$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

Substituindo na reta s

$$x = 4 - \tau = 4$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

$$\tau = 0$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$t = 3 - \tau = 3$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

Substituindo na reta s

$$x = 4 - \tau = 4$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$y = 8 - 3\tau$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

$$\tau = 0$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$t = 3 - \tau = 3$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

Substituindo na reta s

$$x = 4 - \tau = 4$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$y = 8 - 3\tau = 8$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

$$\tau = 0$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - \tau \\ 2 + 2t = 8 - 3\tau \end{cases}$$

$$t = 3 - \tau = 3$$

$$\begin{cases} t = 3 - \tau \\ 2t + 3\tau = 6 \end{cases}$$

Substituindo na reta s

$$x = 4 - \tau = 4$$

$$2(3 - \tau) + 3\tau = 6$$

$$y = 8 - 3\tau = 8$$

$$6 - 2\tau + 3\tau = 6$$

Assim $r \cap s = \{(4, 8)\}$

$$\tau = 0$$

Conteúdo

Posições Relativas no Plano

Posições Relativas no Espaço

Procedimento Geral

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — “mantêm a distância”

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — “mantêm a distância”
- ▶ coincidentes

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — “mantêm a distância”
- ▶ coincidentes — são a mesma reta

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — “mantêm a distância”
- ▶ coincidentes — são a mesma reta
- ▶ reversas

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — “mantêm a distância”
- ▶ coincidentes — são a mesma reta
- ▶ reversas — não são paralelas

Posições Relativas entre Retas no Espaço

No **espaço**, duas retas podem ser

- ▶ concorrentes — se tocam em um único ponto
- ▶ paralelas distintas — “mantêm a distância”
- ▶ coincidentes — são a mesma reta
- ▶ reversas — não são paralelas e não possuem ponto de interseção

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

Dadas duas retas

$$r: \vec{r} = \vec{p} + t \vec{v}$$

$$s: \vec{r} = \vec{q} + \tau \vec{w}$$

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

Dadas duas retas

$$r: \vec{r} = \vec{p} + t \vec{v}$$

$$s: \vec{r} = \vec{q} + \tau \vec{w}$$

Verificamos se existe α , tal que

$$\vec{v} = \alpha \vec{w}$$

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

Dadas duas retas

$$r: \vec{r} = \vec{p} + t \vec{v}$$

$$s: \vec{r} = \vec{q} + \tau \vec{w}$$

Verificamos se existe α , tal que

$$\vec{v} = \alpha \vec{w}$$

Se os vetores forem paralelos as retas são **paralelas distintas** ou **coincidentes**

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

Se os vetores não forem paralelos

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

Se os vetores **não** forem paralelos

Se as retas estiverem no mesmo plano elas são **concorrentes**

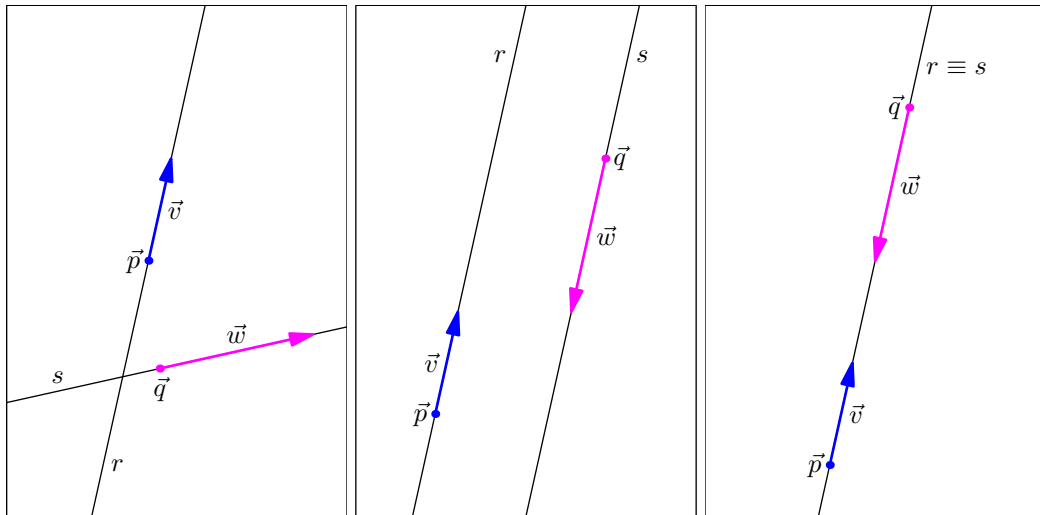
Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

Se os vetores **não** forem paralelos

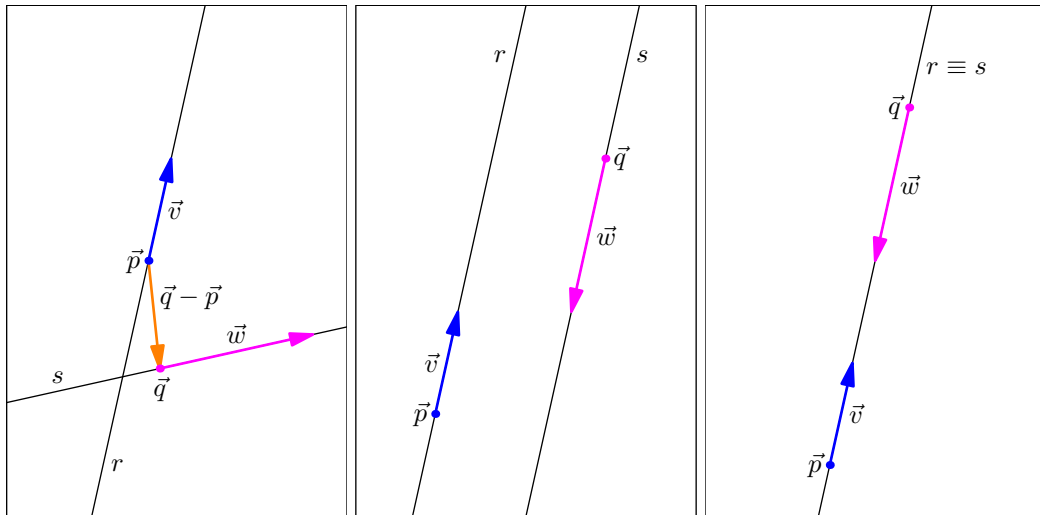
Se as retas estiverem no mesmo plano elas são **concorrentes**

Se estiverem em planos diferentes são **reversas**

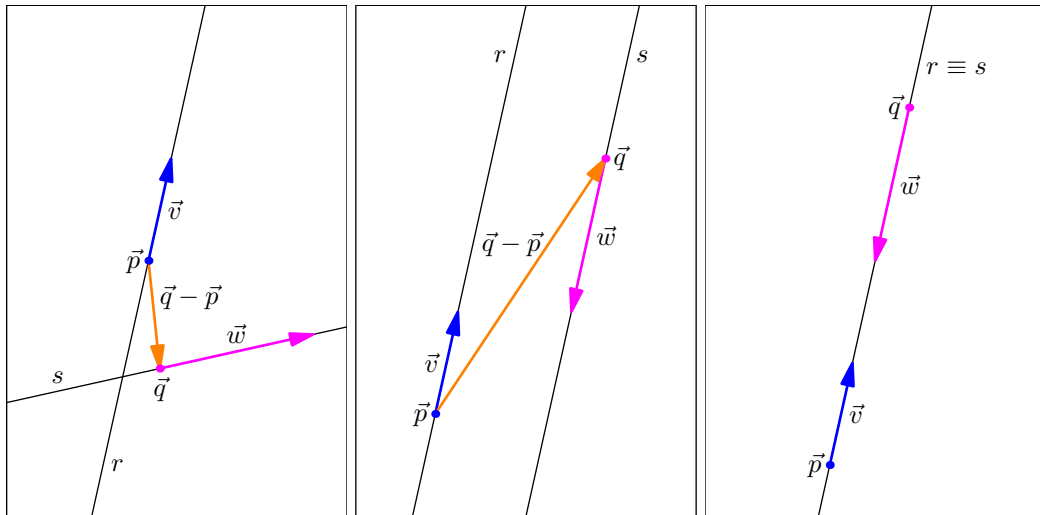
Retas Reversas



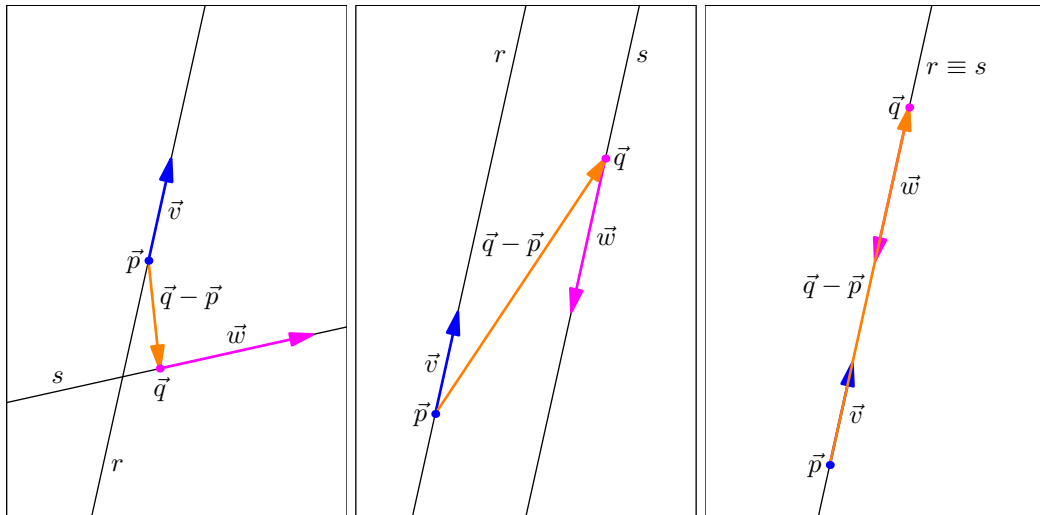
Retas Reversas



Retas Reversas



Retas Reversas



Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

As retas são coplanares,

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

As retas são coplanares, se os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{q} - \vec{p}$ são coplanares

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

As retas são coplanares, se os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{q} - \vec{p}$ são coplanares

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) = 0$$

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

As retas são coplanares, se os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{q} - \vec{p}$ são coplanares

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) = 0$$

nesse caso, as retas são **concorrentes**

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

As retas são coplanares, se os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{q} - \vec{p}$ são coplanares

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) = 0$$

nesse caso, as retas são **concorrentes**

Se $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \neq 0$

Retas Reversas em $\mathbb{R}^3$

As retas são coplanares, se os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{q} - \vec{p}$ são coplanares

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) = 0$$

nesse caso, as retas são **concorrentes**

Se $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \neq 0$ as retas são **reversas**

Exemplo 3

Determine a posição relativa entre as retas e, caso exista, o ponto de interseção

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 - 5 \\ y = \tau \\ z = 7 - 2\tau \end{cases}$$

Exemplo 3 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, -1, 2)$$

$$\vec{w} = (-1, 1, -2)$$

Exemplo 3 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, -1, 2)$$

$$\vec{w} = (-1, 1, -2)$$

Como

$$\vec{w} = -\vec{v}$$

Exemplo 3 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, -1, 2)$$

$$\vec{w} = (-1, 1, -2)$$

Como

$$\vec{w} = -\vec{v}$$

as retas são paralelas

Exemplo 3 – Solução

Para verificar se são coincidentes,

Exemplo 3 – Solução

Para verificar se são coincidentes, comparamos os pontos

$$P = (1,2,3)$$

$$Q = (3,0,7)$$

Exemplo 3 – Solução

Para verificar se são coincidentes, comparamos os pontos

$$P = (1,2,3)$$

$$Q = (3,0,7)$$

Temos

$$Q - P$$

Exemplo 3 – Solução

Para verificar se são coincidentes, comparamos os pontos

$$P = (1, 2, 3)$$

$$Q = (3, 0, 7)$$

Temos

$$Q - P = (2, -2, 4)$$

Exemplo 3 – Solução

Para verificar se são coincidentes, comparamos os pontos

$$P = (1, 2, 3)$$

$$Q = (3, 0, 7)$$

Temos

$$Q - P = (2, -2, 4) = 2\vec{v}$$

Exemplo 3 – Solução

Para verificar se são coincidentes, comparamos os pontos

$$P = (1, 2, 3)$$

$$Q = (3, 0, 7)$$

Temos

$$Q - P = (2, -2, 4) = 2\vec{v}$$

Portanto, o ponto Q pertence à reta r

Exemplo 3 – Solução

Para verificar se são coincidentes, comparamos os pontos

$$P = (1, 2, 3)$$

$$Q = (3, 0, 7)$$

Temos

$$Q - P = (2, -2, 4) = 2\vec{v}$$

Portanto, o ponto Q pertence à reta r

Consequentemente, as duas retas são coincidentes

Exemplo 4

Determine a posição relativa entre as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 2\tau \\ y = 1 + 4\tau \\ z = 2 + 6\tau \end{cases}$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

$$1 = 4 + 2\tau$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

$$1 = 4 + 2\tau$$

$$2\tau = -3$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

$$1 = 4 + 2\tau$$

$$2\tau = -3$$

$$\tau = \frac{-3}{2}$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

$$1 = 4 + 2\tau$$

$$2\tau = -3$$

$$\tau = \frac{-3}{2}$$

$$y = 1 + 4\tau$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

$$1 = 4 + 2\tau$$

$$2\tau = -3$$

$$\tau = \frac{-3}{2}$$

$$y = 1 + 4\tau$$

$$= 1 + 4\frac{-3}{2}$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

$$1 = 4 + 2\tau$$

$$2\tau = -3$$

$$\tau = \frac{-3}{2}$$

$$y = 1 + 4\tau$$

$$= 1 + 4\frac{-3}{2}$$

$$= -5$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

$$1 = 4 + 2\tau$$

$$2\tau = -3$$

$$\tau = \frac{-3}{2}$$

$$y = 1 + 4\tau$$

$$= 1 + 4\frac{-3}{2}$$

$$= -5$$

$$\neq 2$$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

$$1 = 4 + 2\tau$$

$$2\tau = -3$$

$$\tau = \frac{-3}{2}$$

$$y = 1 + 4\tau$$

$$= 1 + 4\frac{-3}{2}$$

$$= -5$$

$$\neq 2$$

portanto, $P \notin s$

Exemplo 4 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{w} = (2, 4, 6)$$

Como

$$\vec{w} = 2\vec{v}$$

as retas são paralelas

Verificar se

$$P = (1, 2, -1) \in s$$

$$x = 4 + 2\tau$$

$$1 = 4 + 2\tau$$

$$2\tau = -3$$

$$\tau = \frac{-3}{2}$$

$$y = 1 + 4\tau$$

$$= 1 + 4\frac{-3}{2}$$

$$= -5$$

$$\neq 2$$

portanto, $P \notin s$

As retas são
paralelas distintas

Exemplo 5

Determine a posição relativa entre as retas

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + \tau \\ y = 2 - \tau \\ z = 1 + \tau \end{cases}$$

Exemplo 5 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 1, 2)$$

$$\vec{w} = (1, -1, 1)$$

Exemplo 5 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 1, 2)$$

$$\vec{w} = (1, -1, 1)$$

Eles não são paralelos

Exemplo 5 – Solução

Os vetores diretores são

$$\vec{v} = (1, 1, 2)$$

$$\vec{w} = (1, -1, 1)$$

Eles não são paralelos

Então, as retas podem ser concorrentes ou reversas

Exemplo 5 – Solução

Construindo o vetor conectando as duas retas

Exemplo 5 – Solução

Construindo o vetor conectando as duas retas

$$\vec{p} = (0, 1, 0)$$

Exemplo 5 – Solução

Construindo o vetor conectando as duas retas

$$\vec{p} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{q} = (1, 2, 1)$$

Exemplo 5 – Solução

Construindo o vetor conectando as duas retas

$$\vec{p} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{q} = (1, 2, 1)$$

$$\vec{d}$$

Exemplo 5 – Solução

Construindo o vetor conectando as duas retas

$$\vec{p} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{q} = (1, 2, 1)$$

$$\vec{d} = \vec{q} - \vec{p}$$

Exemplo 5 – Solução

Construindo o vetor conectando as duas retas

$$\vec{p} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{q} = (1, 2, 1)$$

$$\vec{d} = \vec{q} - \vec{p} = (1, 2, 1) - (0, 1, 0)$$

Exemplo 5 – Solução

Construindo o vetor conectando as duas retas

$$\vec{p} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{q} = (1, 2, 1)$$

$$\vec{d} = \vec{q} - \vec{p} = (1, 2, 1) - (0, 1, 0) = (1, 1, 1)$$

Exemplo 5 – Solução

Construindo o vetor conectando as duas retas

$$\vec{p} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{q} = (1, 2, 1)$$

$$\vec{d} = \vec{q} - \vec{p} = (1, 2, 1) - (0, 1, 0) = (1, 1, 1)$$

Precisamos verificar se os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{d}$ são coplanares

Exemplo 5 – Solução

Produto misto

Exemplo 5 – Solução

Produto misto

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{d}$$

Exemplo 5 – Solução

Produto misto

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{d} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

Produto misto

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{d} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

Produto misto

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{d} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1 - 1) - 0 + 2(1 + 1)\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Produto misto

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{d} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\&= (-1 - 1) - 0 + 2(1 + 1) \\&= 2\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Produto misto

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{d} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\&= (-1 - 1) - 0 + 2(1 + 1) \\&= 2 \neq 0\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Produto misto

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{d} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\&= (-1 - 1) - 0 + 2(1 + 1) \\&= 2 \neq 0\end{aligned}$$

Os vetores não são coplanares

Exemplo 5 – Solução

Produto misto

$$\begin{aligned}(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{d} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1 - 1) - 0 + 2(1 + 1) \\ &= 2 \neq 0\end{aligned}$$

Os vetores não são coplanares

Consequentemente, as retas são reversas

Conteúdo

Posições Relativas no Plano

Posições Relativas no Espaço

Procedimento Geral

Determinar a Posição Relativa

Dadas as retas

$$r: \vec{r} = \vec{p} + t \vec{v}$$

$$s: \vec{r} = \vec{q} + \tau \vec{w}$$

Determinar a Posição Relativa

Dadas as retas

$$r: \vec{r} = \vec{p} + t \vec{v}$$

$$s: \vec{r} = \vec{q} + \tau \vec{w}$$

Verificamos se os vetores diretores são paralelos

$$\vec{w} \stackrel{?}{=} \alpha \vec{v}$$

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores diretores forem **paralelos**

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores diretores forem **paralelos**

$$\vec{v} = \alpha \vec{w}$$

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores diretores forem **paralelos**

$$\vec{v} = \alpha \vec{w}$$

as retas são paralelas ou coincidentes

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores diretores forem **paralelos**

$$\vec{v} = \alpha \vec{w}$$

as retas são paralelas ou coincidentes

Se $\vec{p} - \vec{q}$

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores diretores forem **paralelos**

$$\vec{v} = \alpha \vec{w}$$

as retas são paralelas ou coincidentes

Se $\vec{p} - \vec{q}$ é paralelo a $\vec{v}$

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores diretores forem **paralelos**

$$\vec{v} = \alpha \vec{w}$$

as retas são paralelas ou coincidentes

Se $\vec{p} - \vec{q}$ é paralelo a $\vec{v}$ e as retas são coincidentes

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores não forem paralelos

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores **não** forem paralelos

No **plano**: as retas são concorrente

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores **não** forem paralelos

No **plano**: as retas são concorrente

No **espaço**: calculamos o produto misto $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q})$

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores **não** forem paralelos

No **plano**: as retas são concorrente

No **espaço**: calculamos o produto misto $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q})$

Se o produto misto for zero,

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores **não** forem paralelos

No **plano**: as retas são concorrente

No **espaço**: calculamos o produto misto $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q})$

Se o produto misto for zero, as retas são coplanares e concorrentes

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores **não** forem paralelos

No **plano**: as retas são concorrente

No **espaço**: calculamos o produto misto $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q})$

Se o produto misto for zero, as retas são coplanares e concorrentes

Se o produto misto for diferente de zero,

Determinar a Posição Relativa

Se os vetores **não** forem paralelos

No **plano**: as retas são concorrente

No **espaço**: calculamos o produto misto $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{p} - \vec{q})$

Se o produto misto for zero, as retas são coplanares e concorrentes

Se o produto misto for diferente de zero, as retas são reversas