Equação do Plano

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Equação Vetorial do Plano

Equação Geral do Plano

Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores

Um plano pode ser determinado por

Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores

Um plano pode ser determinado por

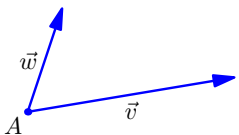
- um ponto A pertencente ao plano

Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores

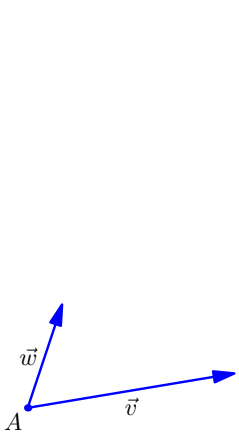
Um plano pode ser determinado por

- um ponto A pertencente ao plano
- dois vetores não nulos e não paralelos $\vec{v}$ e $\vec{w}$

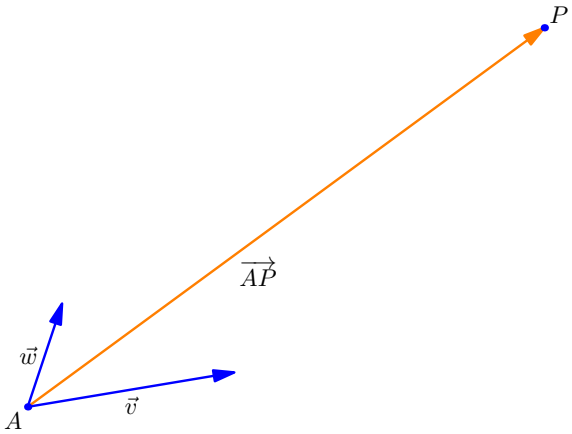
Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores



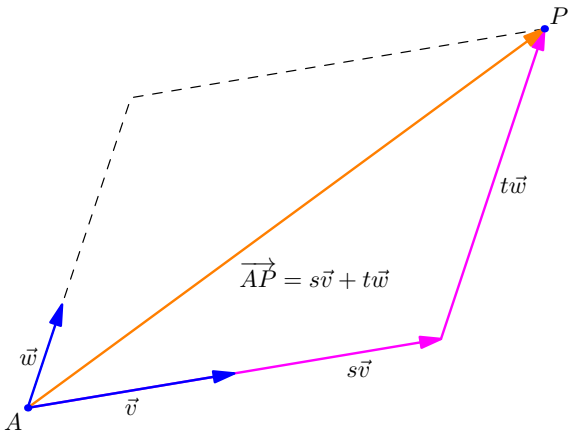
Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores



Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores



Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores



Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores

Se P é um ponto qualquer do plano,

Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores

Se P é um ponto qualquer do plano,

então o vetor $\overrightarrow{AP}$

Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores

Se P é um ponto qualquer do plano,

então o vetor $\overrightarrow{AP}$

pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$

Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores

Se P é um ponto qualquer do plano,

então o vetor $\overrightarrow{AP}$

pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\overrightarrow{AP} = s\vec{v} + t\vec{w}$$

Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores

Se P é um ponto qualquer do plano,

então o vetor $\overrightarrow{AP}$

pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\overrightarrow{AP} = s\vec{v} + t\vec{w}$$

$$P - A = s\vec{v} + t\vec{w}$$

Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores

Se P é um ponto qualquer do plano,

então o vetor $\overrightarrow{AP}$

pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\overrightarrow{AP} = s\vec{v} + t\vec{w}$$

$$P - A = s\vec{v} + t\vec{w}$$

$$P = A + s\vec{v} + t\vec{w}$$

Plano Determinado por um Ponto e Dois Vetores

Se P é um ponto qualquer do plano,

então o vetor $\overrightarrow{AP}$

pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\overrightarrow{AP} = s\vec{v} + t\vec{w}$$

$$P - A = s\vec{v} + t\vec{w}$$

$$P = A + s\vec{v} + t\vec{w}$$

com $s, t \in \mathbb{R}$

Equação Vetorial do Plano

Se

Equação Vetorial do Plano

Se $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

Equação Vetorial do Plano

Se $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Equação Vetorial do Plano

Se $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

Equação Vetorial do Plano

Se $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

a Equação Vetorial do Plano é

Equação Vetorial do Plano

Se $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

a Equação Vetorial do Plano é

$$\vec{r} = A + s\vec{v} + t\vec{w}$$

Equação Vetorial do Plano

Se $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

a Equação Vetorial do Plano é

$$\vec{r} = A + s\vec{v} + t\vec{w}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \qquad s,\, t \in \mathbb{R}$$

Equações Paramétricas do Plano

Reescrevendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

Equações Paramétricas do Plano

Reescrevendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

compomente por componente,

Equações Paramétricas do Plano

Reescrevendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

compomente por componente, obtemos as Equações Paramétricas do Plano

Equações Paramétricas do Plano

Reescrevendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

compomente por componente, obtemos as Equações Paramétricas do Plano

$$\begin{cases} x = x_0 + as + dt \\ y = y_0 + bs + et \\ z = z_0 + cs + ft \end{cases}$$

Exemplo 1

Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas do plano que passa pelo ponto

$$A = (1, 2, -1)$$

e contém os vetores

$$\vec{v} = (2, -1, 3)$$

$$\vec{w} = (1, 2, 1)$$

Exemplo 1 – Solução

A equação vetorial do plano é

$$\vec{r} = A + s\vec{v} + t\vec{w}$$

Exemplo 1 – Solução

A equação vetorial do plano é

$$\vec{r} = A + s\vec{v} + t\vec{w}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s,\, t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1 – Solução

A equação vetorial do plano é

$$\vec{r} = A + s\vec{v} + t\vec{w}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s,\, t \in \mathbb{R}$$

Separando as coordenadas

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + t \\ y = 2 - s + 2t \\ z = -1 + 3s + t \end{cases}$$

Conteúdo

Equação Vetorial do Plano

Equação Geral do Plano

Vetor Normal ao Plano

Qualquer vetor ortogonal ao plano é um vetor normal ao plano

Vetor Normal ao Plano

Qualquer vetor ortogonal ao plano é um vetor normal ao plano

Um vetor normal a um plano é ortogonal a todos os vetores contidos no plano

Vetor Normal ao Plano

Qualquer vetor ortogonal ao plano é um vetor normal ao plano

Um vetor normal a um plano é ortogonal a todos os vetores contidos no plano

Dados vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos e não paralelos no plano

Vetor Normal ao Plano

Qualquer vetor ortogonal ao plano é um vetor normal ao plano

Um vetor normal a um plano é ortogonal a todos os vetores contidos no plano

Dados vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos e não paralelos no plano

$\vec{v} \times \vec{w}$ é um vetor normal ao plano

Equação Geral do Plano

Considere um plano que contém o ponto

$$A = (x_0, y_0, z_0)$$

Equação Geral do Plano

Considere um plano que contém o ponto

$$A = (x_0, y_0, z_0)$$

e possui vetor normal

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Equação Geral do Plano

Considere um plano que contém o ponto

$$A = (x_0, y_0, z_0)$$

e possui vetor normal

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Se $P = (x, y, z)$ pertence ao plano

Equação Geral do Plano

Considere um plano que contém o ponto

$$A = (x_0, y_0, z_0)$$

e possui vetor normal

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Se $P = (x, y, z)$ pertence ao plano $\overrightarrow{AP}$ é perpendicular a $\vec{n}$

Equação Geral do Plano

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Equação Geral do Plano

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Equação Geral do Plano

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Equação Geral do Plano

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$

Equação Geral do Plano

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

Exemplo 2

Determine a equação geral do plano que passa pelo ponto

$$A = (1, 2, -1)$$

e contém os vetores

$$\vec{v} = (2, -1, 3)$$

$$\vec{w} = (1, 2, 1)$$

Exemplo 2 – Vetor Normal

Um vetor normal é

Exemplo 2 – Vetor Normal

Um vetor normal é

$$\vec{n}$$

Exemplo 2 – Vetor Normal

Um vetor normal é

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

Exemplo 2 – Vetor Normal

Um vetor normal é

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 2 – Vetor Normal

Um vetor normal é

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-6, 3-2, 4+1)$$

Exemplo 2 – Vetor Normal

Um vetor normal é

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-6, 3-2, 4+1)$$

$$= (-7, 1, 5)$$

Exemplo 2 – Solução

A equação do plano é

Exemplo 2 – Solução

A equação do plano é

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Exemplo 2 – Solução

A equação do plano é

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$-7(x-1) + (y-2) + 5(z+1) = 0$$

Exemplo 2 – Solução

A equação do plano é

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$-7(x-1) + (y-2) + 5(z+1) = 0$$

$$-7x + 7 + y - 2 + 5z + 5 = 0$$

Exemplo 2 – Solução

A equação do plano é

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$-7(x-1) + (y-2) + 5(z+1) = 0$$

$$-7x + 7 + y - 2 + 5z + 5 = 0$$

$$-7x + y + 5z + 10 = 0$$

Exemplo 3

Determine a equação geral do plano que passa pelos pontos

$A = (1, 0, 2)$

$B = (3, 1, 1)$

$C = (0, 2, 3)$

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

$\vec{v}$

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, 1) - (1, 0, 2)$$

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, 1) - (1, 0, 2) = (2, 1, -1)$$

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,1,1) - (1,0,2) = (2,1,-1)$$

$$\vec{w}$$

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,1,1) - (1,0,2) = (2,1,-1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC}$$

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, 1) - (1, 0, 2) = (2, 1, -1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = C - A$$

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, 1) - (1, 0, 2) = (2, 1, -1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 2, 3) - (1, 0, 2)$$

Exemplo 3 – Solução

Construímos dois vetores contidos no plano

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,1,1) - (1,0,2) = (2,1,-1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,2,3) - (1,0,2) = (-1,2,1)$$

Exemplo 3 – Solução

Um vetor normal é

Exemplo 3 – Solução

Um vetor normal é

$$\vec{n}$$

Exemplo 3 – Solução

Um vetor normal é

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

Exemplo 3 – Solução

Um vetor normal é

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{v} \times \vec{w} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

Um vetor normal é

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{v} \times \vec{w} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (3, -1, 5)\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

Usando o ponto $A = (1,0,2)$

Exemplo 3 – Solução

Usando o ponto $A = (1,0,2)$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Exemplo 3 – Solução

Usando o ponto $A = (1,0,2)$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$(3, -1,5) \cdot (x - 1, y - 0, z - 2) = 0$$

Exemplo 3 – Solução

Usando o ponto $A = (1,0,2)$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$(3, -1,5) \cdot (x - 1, y - 0, z - 2) = 0$$

$$3(x - 1) - y + 5(z - 2) = 0$$

Exemplo 3 – Solução

Usando o ponto $A = (1,0,2)$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$(3, -1,5) \cdot (x - 1, y - 0, z - 2) = 0$$

$$3(x - 1) - y + 5(z - 2) = 0$$

$$3x - 3 - y + 5z - 10 = 0$$

Exemplo 3 – Solução

Usando o ponto $A = (1,0,2)$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$(3, -1,5) \cdot (x-1, y-0, z-2) = 0$$

$$3(x-1) - y + 5(z-2) = 0$$

$$3x - 3 - y + 5z - 10 = 0$$

$$3x - y + 5z - 13 = 0$$

Exemplo 4

Determine uma parametrização para o plano

$$2x - y + z - 3 = 0$$

Exemplo 4 – Solução

Temos

$$2x - y + z - 3 = 0$$

Exemplo 4 – Solução

Temos

$$2x - y + z - 3 = 0$$

Isolamos uma coordenada

$$y = 2x + z - 3$$

Exemplo 4 – Solução

Temos

$$2x - y + z - 3 = 0$$

Isolamos uma coordenada

$$y = 2x + z - 3$$

Escolhemos duas variáveis livres

$$x = s$$

$$z = t$$

Exemplo 4 – Solução

Temos

$$2x - y + z - 3 = 0$$

Isolamos uma coordenada

$$y = 2x + z - 3$$

Escolhemos duas variáveis livres

$$x = s$$

$$z = t$$

Equação parametrica do plano

$$\begin{cases} x = s \\ y = -3 + 2s + t \\ z = t \end{cases}$$

com $s, t \in \mathbb{R}$

Exemplo 5

Determine se os pontos $P = (1, 2, 0)$ e $Q = (1, 1, -1)$ pertencem ao plano

$\gamma\colon 2x - 3y + z + 4 = 0$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $P = (1, 2, 0)$ na equação

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $P = (1, 2, 0)$ na equação

$$2x - 3y + z + 4$$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $P = (1, 2, 0)$ na equação

$$2x - 3y + z + 4 = 2(1) - 3(2) + 0 + 4$$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $P = (1, 2, 0)$ na equação

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 4 &= 2(1) - 3(2) + 0 + 4 \\ &= 2 - 6 + 4 \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $P = (1, 2, 0)$ na equação

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 4 &= 2(1) - 3(2) + 0 + 4 \\ &= 2 - 6 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $P = (1, 2, 0)$ na equação

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 4 &= 2(1) - 3(2) + 0 + 4 \\ &= 2 - 6 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

A equação do plano é satisfeita

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $P = (1, 2, 0)$ na equação

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 4 &= 2(1) - 3(2) + 0 + 4 \\ &= 2 - 6 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

A equação do plano é satisfeita e $P \in \gamma$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $Q = (1, 1, -1)$ na equação

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $Q = (1, 1, -1)$ na equação

$$2x - 3y + z + 4$$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $Q = (1, 1, -1)$ na equação

$$2x - 3y + z + 4 = 2(1) - 3(1) + (-1) + 4$$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $Q = (1, 1, -1)$ na equação

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 4 &= 2(1) - 3(1) + (-1) + 4 \\ &= 2 - 3 - 1 + 4 \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $Q = (1, 1, -1)$ na equação

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 4 &= 2(1) - 3(1) + (-1) + 4 \\ &= 2 - 3 - 1 + 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $Q = (1, 1, -1)$ na equação

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 4 &= 2(1) - 3(1) + (-1) + 4 \\ &= 2 - 3 - 1 + 4 \\ &= 2 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $Q = (1, 1, -1)$ na equação

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 4 &= 2(1) - 3(1) + (-1) + 4 \\ &= 2 - 3 - 1 + 4 \\ &= 2 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

A equação do plano não é satisfeita

Exemplo 5 – Solução

Substituímos as coordenadas de $Q = (1, 1, -1)$ na equação

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 4 &= 2(1) - 3(1) + (-1) + 4 \\ &= 2 - 3 - 1 + 4 \\ &= 2 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

A equação do plano não é satisfeita e $Q \notin \gamma$