Posições Relativas de Planos

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Posições Relativas entre Planos

Posições Relativas entre Dois Planos em $\mathbb{R}^3$

Dois planos podem ser

Posições Relativas entre Dois Planos em $\mathbb{R}^3$

Dois planos podem ser

- coincidentes

Posições Relativas entre Dois Planos em $\mathbb{R}^3$

Dois planos podem ser

- coincidentes
- paralelos distintos

Posições Relativas entre Dois Planos em $\mathbb{R}^3$

Dois planos podem ser

- coincidentes
- paralelos distintos
- secantes ou concorrentes

Posições Relativas entre Dois Planos

Considere dois planos

Posições Relativas entre Dois Planos

Considere dois planos

$$\alpha\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

Posições Relativas entre Dois Planos

Considere dois planos

$$\alpha\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\beta\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Posições Relativas entre Dois Planos

Considere dois planos

$$\alpha\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\beta\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Seus vetores normais são

Posições Relativas entre Dois Planos

Considere dois planos

$$\alpha\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\beta\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Seus vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Posições Relativas entre Dois Planos

Considere dois planos

$$\alpha\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\beta\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Seus vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Planos Paralelos

Os planos são paralelos quando seus vetores normais são paralelos

Planos Paralelos

Os planos são paralelos quando seus vetores normais são paralelos

$$\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

Planos Paralelos

Os planos são paralelos quando seus vetores normais são paralelos

$$\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

Eles podem ser paralelos distintos ou coincidentes

Planos Paralelos

Os planos são paralelos quando seus vetores normais são paralelos

$$\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

Eles podem ser paralelos distintos ou coincidentes

Se $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$ e $d_2 = \lambda d_1$

Planos Paralelos

Os planos são paralelos quando seus vetores normais são paralelos

$$\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

Eles podem ser paralelos distintos ou coincidentes

Se $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$ e $d_2 = \lambda d_1$ os planos são coincidentes

Planos Paralelos

Os planos são paralelos quando seus vetores normais são paralelos

$$\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

Eles podem ser paralelos distintos ou coincidentes

Se $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$ e $d_2 = \lambda d_1$ os planos são coincidentes

Se os vetores normais são paralelos,

Planos Paralelos

Os planos são paralelos quando seus vetores normais são paralelos

$$\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

Eles podem ser paralelos distintos ou coincidentes

Se $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$ e $d_2 = \lambda d_1$ os planos são coincidentes

Se os vetores normais são paralelos, mas as equações não são proporcionais,

Planos Paralelos

Os planos são paralelos quando seus vetores normais são paralelos

$$\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

Eles podem ser paralelos distintos ou coincidentes

Se $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$ e $d_2 = \lambda d_1$ os planos são coincidentes

Se os vetores normais são paralelos, mas as equações não são proporcionais, os planos são paralelos distintos

Planos Secantes

Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ não são paralelos

Planos Secantes

Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ não são paralelos

os planos são secantes (ou concorrentes)

Planos Secantes

Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ não são paralelos

os planos são secantes (ou concorrentes)

Nesse caso, eles possuem uma reta em comum

Interseção entre os Planos Secantes

A direção da reta de interseção é perpendicular aos dois vetores normais

Interseção entre os Planos Secantes

A direção da reta de interseção é perpendicular aos dois vetores normais

Vetor diretor da reta comum aos planos pode ser

Interseção entre os Planos Secantes

A direção da reta de interseção é perpendicular aos dois vetores normais

Vetor diretor da reta comum aos planos pode ser

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Exemplo 1

Determine a posição relativa dos planos

$\pi_1 \colon 2x - y + 3z - 4 = 0$

$\pi_2 \colon 6x - 3y + 9z - 12 = 0$

Exemplo 1 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Como

$$\vec{n}_2 = 3\vec{n}_1$$

Exemplo 1 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Como

$$\vec{n}_2 = 3\vec{n}_1$$

os planos são paralelos

Exemplo 1 – Solução

Os coeficientes da segunda equação são três vezes os da primeira

Exemplo 1 – Solução

Os coeficientes da segunda equação são três vezes os da primeira

$$6 = 3(2)$$

Exemplo 1 – Solução

Os coeficientes da segunda equação são três vezes os da primeira

$$6 = 3(2)$$

$$-3 = 3(-1)$$

Exemplo 1 – Solução

Os coeficientes da segunda equação são três vezes os da primeira

$$6 = 3(2)$$

$$-3 = 3(-1)$$

$$9 = 3(3)$$

Exemplo 1 – Solução

Os coeficientes da segunda equação são três vezes os da primeira

$$6 = 3(2)$$

$$-3 = 3(-1)$$

$$9 = 3(3)$$

$$-12 = 3(-4)$$

Exemplo 1 – Solução

Os coeficientes da segunda equação são três vezes os da primeira

$$\begin{aligned} 6 &= 3(2) \\ -3 &= 3(-1) \\ 9 &= 3(3) \\ -12 &= 3(-4) \end{aligned}$$

as duas equações representam o mesmo conjunto de pontos

Exemplo 1 – Solução

Os coeficientes da segunda equação são três vezes os da primeira

$$\begin{aligned} 6 &= 3(2) \\ -3 &= 3(-1) \\ 9 &= 3(3) \\ -12 &= 3(-4) \end{aligned}$$

as duas equações representam o mesmo conjunto de pontos

Logo, os planos são coincidentes

Exemplo 2

Determine a posição relativa dos planos

$\pi_1 \colon 2x - y + 3z - 4 = 0$

$\pi_2 \colon 4x - 2y + 6z + 5 = 0$

Exemplo 2 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Como

$$\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$$

Exemplo 2 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Como

$$\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$$

os planos são paralelos ou coincidentes

Exemplo 2 – Solução

Multiplicarmos a primeira equação por 2,

Exemplo 2 – Solução

Multiplicarmos a primeira equação por 2, obtemos

$$4x - 2y + 6z - 8 = 0$$

Exemplo 2 – Solução

Multiplicarmos a primeira equação por 2, obtemos

$$4x - 2y + 6z - 8 = 0$$

A segunda equação é

$$4x - 2y + 6z + 5 = 0$$

Exemplo 2 – Solução

Multiplicarmos a primeira equação por 2, obtemos

$$4x - 2y + 6z - 8 = 0$$

A segunda equação é

$$4x - 2y + 6z + 5 = 0$$

As constantes são diferentes

Exemplo 2 – Solução

Multiplicarmos a primeira equação por 2, obtemos

$$4x - 2y + 6z - 8 = 0$$

A segunda equação é

$$4x - 2y + 6z + 5 = 0$$

As constantes são diferentes

Portanto, as equações não representam o mesmo plano

Exemplo 2 – Solução

Multiplicarmos a primeira equação por 2, obtemos

$$4x - 2y + 6z - 8 = 0$$

A segunda equação é

$$4x - 2y + 6z + 5 = 0$$

As constantes são diferentes

Portanto, as equações não representam o mesmo plano

Os planos são paralelos distintos

Exemplo 3

Mostre que os planos

$$\pi_1 \colon x + y + z - 3 = 0$$

$$\pi_2 \colon 2x - y + z - 1 = 0$$

são secantes e determine uma equação paramétrica para a reta de interseção

Exemplo 3 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Não são paralelos, pois

Exemplo 3 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Não são paralelos, pois

$$1 = 1$$

Exemplo 3 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Não são paralelos, pois

$$1 = 1$$

$$2 \neq -1$$

Exemplo 3 – Solução

Os vetores normais são

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Não são paralelos, pois

$$1 = 1$$

$$2 \neq -1$$

Os planos são secantes

Exemplo 3 – Solução

A direção da reta de interseção é

Exemplo 3 – Solução

A direção da reta de interseção é

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Exemplo 3 – Solução

A direção da reta de interseção é

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

A direção da reta de interseção é

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2, 1, -3)\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Escolhemos $z = 0$

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Escolhemos $z = 0$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Somando as equações

Escolhemos $z = 0$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Somando as equações

$$3x = 4$$

Escolhemos $z = 0$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Escolhemos $z = 0$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Somando as equações

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Escolhemos $z = 0$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Somando as equações

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$y = 3 - x$$

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Escolhemos $z = 0$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Somando as equações

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$y = 3 - x$$

$$= 3 - \frac{4}{3}$$

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Escolhemos $z = 0$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Somando as equações

$$\begin{aligned} 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \\ y &= 3 - x \\ &= 3 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

Ponto comum aos dois planos

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Escolhemos $z = 0$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Somando as equações

$$\begin{aligned} 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \\ y &= 3 - x \\ &= 3 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Um ponto da reta é

$$A = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$$

Exemplo 3 – Solução

Equação vetorial da reta de interseção

Exemplo 3 – Solução

Equação vetorial da reta de interseção

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

Equação vetorial da reta de interseção

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

A equação paramétrica é

Exemplo 3 – Solução

Equação vetorial da reta de interseção

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

A equação paramétrica é

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + 2t \\ y = \frac{5}{3} + t \\ z = -3t \end{cases}$$