Posições Relativas entre Planos e Retas

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Posições Relativas entre uma Reta e um Plano

Existem três possibilidades

Posições Relativas entre uma Reta e um Plano

Existem três possibilidades

- a reta está contida no plano

Posições Relativas entre uma Reta e um Plano

Existem três possibilidades

- a reta está contida no plano
- a reta é paralela ao plano e não está contida nele

Posições Relativas entre uma Reta e um Plano

Existem três possibilidades

- a reta está contida no plano
- a reta é paralela ao plano e não está contida nele
- a reta é secante ao plano

Posições Relativas entre uma Reta e um Plano

Considere a reta $r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v}$

Posições Relativas entre uma Reta e um Plano

Considere a reta $r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v}$

e o plano $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$

Posições Relativas entre uma Reta e um Plano

Considere a reta $r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v}$

e o plano $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$

com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$

Posições Relativas entre uma Reta e um Plano

Considere a reta $r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v}$

e o plano $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$

com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$

Comparamos o vetor diretor $\vec{v}$ da reta

Posições Relativas entre uma Reta e um Plano

Considere a reta $r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v}$

e o plano $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$

com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$

Comparamos o vetor diretor $\vec{v}$ da reta com o vetor normal $\vec{n}$ do plano

Critério Usando o Vetor Diretor

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$$

Critério Usando o Vetor Diretor

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$$

a reta é secante ao plano

Critério Usando o Vetor Diretor

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$$

a reta é secante ao plano

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

Critério Usando o Vetor Diretor

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$$

a reta é secante ao plano

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

a reta é paralela ou está contida no plano

Critério Usando o Vetor Diretor

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$$

a reta é secante ao plano

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

a reta é paralela ou está contida no plano

Se houver um ponto em comum a reta está contida no plano

Exemplo 1

Determine a posição relativa entre a reta e o plano e o ponto de interseção, se ele existir

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$\gamma : x + y + z - 6 = 0$$

Exemplo 1 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 2)$

Exemplo 1 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 2)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 1)$

Exemplo 1 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 2)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 1)$

$\vec{v} \cdot \vec{n}$

Exemplo 1 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 2)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 1)$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + (-1)1 + 2 \times 1$$

Exemplo 1 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 2)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 1)$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + (-1)1 + 2 \times 1$$

$$= 1 - 1 + 2$$

Exemplo 1 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 2)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 1)$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \times 1 + (-1)1 + 2 \times 1 \\ &= 1 - 1 + 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 2)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 1)$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \times 1 + (-1)1 + 2 \times 1 \\ &= 1 - 1 + 2 \\ &= 2 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 2)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 1)$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \times 1 + (-1)1 + 2 \times 1 \\ &= 1 - 1 + 2 \\ &= 2 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

a reta é secante ao plano

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

na equação do plano

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

na equação do plano

$$x + y + z - 6 = 0$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

na equação do plano

$$x + y + z - 6 = 0$$

$$(1 + t) + (2 - t) + (3 + 2t) - 6 = 0$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

na equação do plano

$$x + y + z - 6 = 0$$

$$(1 + t) + (2 - t) + (3 + 2t) - 6 = 0$$

$$t - t + 2t + 1 + 2 + 3 - 6 = 0$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

na equação do plano

$$x + y + z - 6 = 0$$

$$(1 + t) + (2 - t) + (3 + 2t) - 6 = 0$$

$$t - t + 2t + 1 + 2 + 3 - 6 = 0$$

$$2t = 0$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

na equação do plano

$$x + y + z - 6 = 0$$

$$(1 + t) + (2 - t) + (3 + 2t) - 6 = 0$$

$$t - t + 2t + 1 + 2 + 3 - 6 = 0$$

$$2t = 0$$

$$t = 0$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \ = \ 1$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \ = \ 1$$

$$y = 2 - t$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t = 1$$

$$y = 2 - t = 2$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1$$

$$y = 2 - t \;=\; 2$$

$$z = 3 + 2t$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1$$

$$y = 2 - t \;=\; 2$$

$$z = 3 + 2t \;=\; 3$$

Exemplo 1 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1$$

$$y = 2 - t \;=\; 2$$

$$z = 3 + 2t \;=\; 3$$

$$P = (1, 2, 3)$$

Exemplo 2

Determine a posição relativa entre a reta e o plano e o ponto de interseção, se ele existir

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$\gamma: x + y - z + 10 = 0$$

Exemplo 2 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, 2, -1)$

Exemplo 2 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, 2, -1)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, -1)$

Exemplo 2 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, 2, -1)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$\vec{v} \cdot \vec{n}$

Exemplo 2 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, 2, -1)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1)(-1)$$

Exemplo 2 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, 2, -1)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1)(-1)$$
$$= 1 + 2 - 1$$

Exemplo 2 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, 2, -1)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1)(-1) \\ &= 1 + 2 - 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, 2, -1)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1)(-1) \\ &= 1 + 2 - 1 \\ &= 2 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, 2, -1)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1)(-1) \\ &= 1 + 2 - 1 \\ &= 2 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

a reta é secante ao plano

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

na equação do plano

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

$$x + y - z + 10 = 0$$

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

na equação do plano

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

na equação do plano

$$x + y - z + 10 = 0$$

$$(1 + t) + (2 + 2t) - (1 - t) + 10 = 0$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

na equação do plano

$$x + y - z + 10 = 0$$

$$(1 + t) + (2 + 2t) - (1 - t) + 10 = 0$$

$$t + 2t + t + 1 + 2 - 1 + 10 = 0$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

na equação do plano

$$\begin{aligned} x + y - z + 10 &= 0 \\ (1 + t) + (2 + 2t) - (1 - t) + 10 &= 0 \\ t + 2t + t + 1 + 2 - 1 + 10 &= 0 \\ 4t + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

na equação do plano

$$\begin{aligned} x + y - z + 10 &= 0 \\ (1 + t) + (2 + 2t) - (1 - t) + 10 &= 0 \\ t + 2t + t + 1 + 2 - 1 + 10 &= 0 \\ 4t + 12 &= 0 \\ t &= \frac{12}{4} \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Substituir a equação da reta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

na equação do plano

$$\begin{aligned} x + y - z + 10 &= 0 \\ (1 + t) + (2 + 2t) - (1 - t) + 10 &= 0 \\ t + 2t + t + 1 + 2 - 1 + 10 &= 0 \\ 4t + 12 &= 0 \\ t &= \frac{12}{4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1 + 3$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1 + 3 \;=\; 4$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1 + 3 \;=\; 4$$

$$y = 2 + 2t$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1 + 3 \;=\; 4$$

$$y = 2 + 2t \;=\; 2 + 2 \times 3$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1 + 3 \;=\; 4$$

$$y = 2 + 2t \;=\; 2 + 2 \times 3 \;=\; 8$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1 + 3 \;=\; 4$$

$$y = 2 + 2t \;=\; 2 + 2 \times 3 \;=\; 8$$

$$z = 1 - t$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1 + 3 \;=\; 4$$

$$y = 2 + 2t \;=\; 2 + 2 \times 3 \;=\; 8$$

$$z = 1 - t \;=\; 1 - 3$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1 + 3 \;=\; 4$$

$$y = 2 + 2t \;=\; 2 + 2 \times 3 \;=\; 8$$

$$z = 1 - t \;=\; 1 - 3 \;=\; -2$$

Exemplo 2 – Ponto de Interseção

Coordenadas do ponto com $t = 0$

$$x = 1 + t \;=\; 1 + 3 \;=\; 4$$

$$y = 2 + 2t \;=\; 2 + 2 \times 3 \;=\; 8$$

$$z = 1 - t \;=\; 1 - 3 \;=\; -2$$

$$P = (4, 8, -2)$$

Exemplo 3

Determine a posição relativa entre a reta e o plano e o ponto de interseção, se ele existir

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\gamma\colon x + y - 3 = 0$$

Exemplo 3 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 0)$

Exemplo 3 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 0)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 0)$

Exemplo 3 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 0)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 0)$

$\vec{v} \cdot \vec{n}$

Exemplo 3 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 0)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 0)$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + (-1)1 + 0 \times 0$$

Exemplo 3 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 0)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 0)$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + (-1)1 + 0 \times 0$$

$$= 1 - 1 + 0$$

Exemplo 3 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 0)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 0)$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \times 1 + (-1)1 + 0 \times 0 \\ &= 1 - 1 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Posição Relativa

O vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 0)$

O vetor normal do plano é $\vec{n} = (1, 1, 0)$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \times 1 + (-1)1 + 0 \times 0 \\ &= 1 - 1 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

a reta é paralela ao plano ou está contida nele

Exemplo 3 – Ponto de Interseção

Escolhemos o ponto da reta

$$A = (1, 2, 3)$$

Exemplo 3 – Ponto de Interseção

Escolhemos o ponto da reta

$$A = (1, 2, 3)$$

e substituimos na equação do plano

Exemplo 3 – Ponto de Interseção

Escolhemos o ponto da reta

$$A = (1, 2, 3)$$

e substituimos na equação do plano

$$x + y - 3$$

Exemplo 3 – Ponto de Interseção

Escolhemos o ponto da reta

$$A = (1, 2, 3)$$

e substituimos na equação do plano

$$x + y - 3 = 1 + 2 - 3$$

Exemplo 3 – Ponto de Interseção

Escolhemos o ponto da reta

$$A = (1, 2, 3)$$

e substituimos na equação do plano

$$x + y - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

Exemplo 3 – Ponto de Interseção

Escolhemos o ponto da reta

$$A = (1, 2, 3)$$

e substituimos na equação do plano

$$x + y - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

Como o ponto da reta satisfaz a equação do plano

Exemplo 3 – Ponto de Interseção

Escolhemos o ponto da reta

$$A = (1, 2, 3)$$

e substituimos na equação do plano

$$x + y - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

Como o ponto da reta satisfaz a equação do plano

$$A \in \gamma$$

Exemplo 3 – Ponto de Interseção

Como a reta possui um ponto no plano e é paralela ao plano

Exemplo 3 – Ponto de Interseção

Como a reta possui um ponto no plano e é paralela ao plano

todos os seus pontos pertencem ao plano

Exemplo 3 – Ponto de Interseção

Como a reta possui um ponto no plano e é paralela ao plano

todos os seus pontos pertencem ao plano

$$r \subset \gamma$$

A reta está contida no plano