Distâncias

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

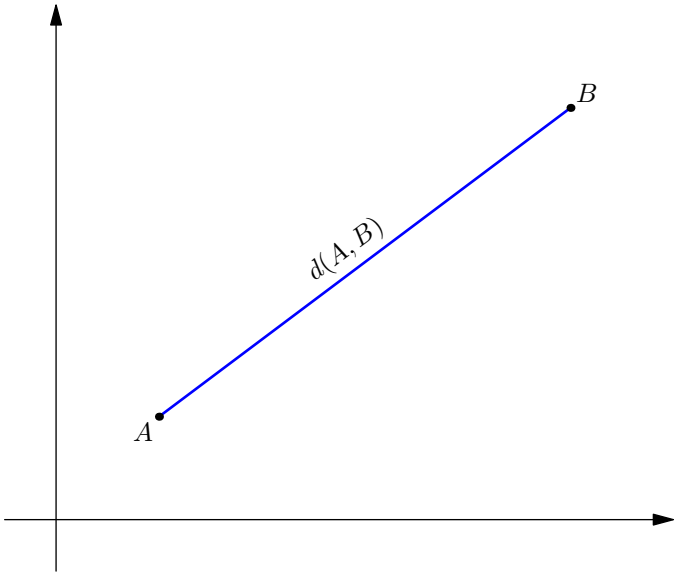
Distância entre Pontos

Propriedades da Distância

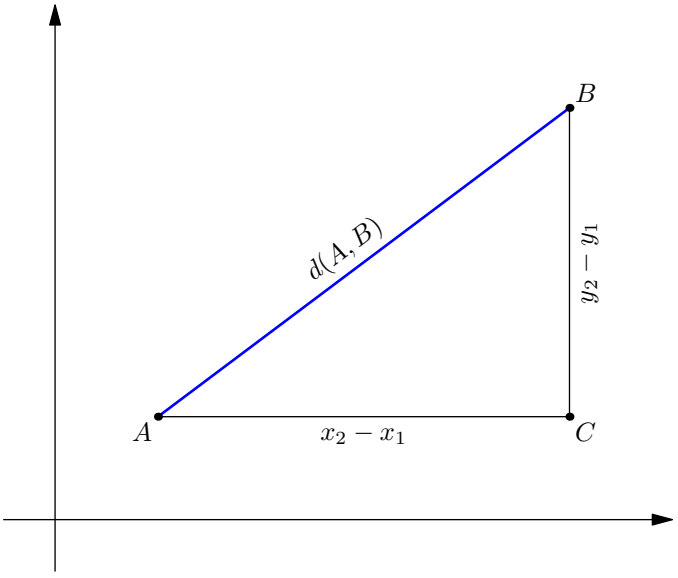
Distância entre Retas Paralelas

Distância de Ponto a Plano

Distância entre Dois Pontos



Distância entre Dois Pontos



Distância entre Dois Pontos

Dados

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$

Distância entre Dois Pontos

Dados

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$

O vetor que liga A a B é

Distância entre Dois Pontos

Dados

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$

O vetor que liga A a B é

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Distância entre Dois Pontos

Dados

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$

O vetor que liga A a B é

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

A distância entre os pontos é a norma do vetor

Distância entre Dois Pontos

Dados

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$

O vetor que liga A a B é

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

A distância entre os pontos é a norma do vetor

$$d(A, B)$$

Distância entre Dois Pontos

Dados

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$

O vetor que liga A a B é

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

A distância entre os pontos é a norma do vetor

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

Distância entre Dois Pontos

Dados

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$

O vetor que liga A a B é

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

A distância entre os pontos é a norma do vetor

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distância no Espaço $\mathbb{R}^3$

Dados

$$A = (x_1, y_1, z_1) \qquad B = (x_2, y_2, z_2)$$

Distância no Espaço $\mathbb{R}^3$

Dados

$$A = (x_1, y_1, z_1) \qquad B = (x_2, y_2, z_2)$$

Temos

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Distância no Espaço $\mathbb{R}^3$

Dados

$$A = (x_1, y_1, z_1) \qquad B = (x_2, y_2, z_2)$$

Temos

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Assim

$$d(A, B)$$

Distância no Espaço $\mathbb{R}^3$

Dados

$$A = (x_1, y_1, z_1) \qquad B = (x_2, y_2, z_2)$$

Temos

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Assim

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

Distância no Espaço $\mathbb{R}^3$

Dados

$$A = (x_1, y_1, z_1) \qquad B = (x_2, y_2, z_2)$$

Temos

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Assim

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Conteúdo

Distância entre Pontos

Propriedades da Distância

Distância entre Retas Paralelas

Distância de Ponto a Plano

Propriedades

Para quaisquer pontos A, B e C

Propriedades

Para quaisquer pontos A, B e C

$$d(A, B) \geq 0$$

Propriedades

Para quaisquer pontos A, B e C

$$d(A, B) \geq 0$$

$$d(A, B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

Propriedades

Para quaisquer pontos A, B e C

$$d(A, B) \geq 0$$

$$d(A, B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

$$d(A, B) = d(B, A)$$

Propriedades

Para quaisquer pontos A, B e C

$$d(A, B) \geq 0$$

$$d(A, B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

$$d(A, B) = d(B, A)$$

Desigualdade triangular

Propriedades

Para quaisquer pontos A, B e C

$$d(A, B) \geq 0$$

$$d(A, B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

$$d(A, B) = d(B, A)$$

Desigualdade triangular

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

Exemplo 1

Calcule a distância entre

$A = (1, 2)$

$B = (5, 5)$

Exemplo 1 – Solução

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (5,5) - (1,2)\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (5,5) - (1,2) \\ &= (5-1, 5-2)\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (5,5) - (1,2) \\ &= (5-1, 5-2) \\ &= (4,3)\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (5,5) - (1,2) \\ &= (5-1, 5-2) \\ &= (4,3)\end{aligned}$$

$$d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (5,5) - (1,2) \\ &= (5-1, 5-2) \\ &= (4,3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(4,3)\|\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (5,5) - (1,2) \\ &= (5-1, 5-2) \\ &= (4,3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(4,3)\| \\ &= \sqrt{4^2+3^2}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (5,5) - (1,2) \\ &= (5-1, 5-2) \\ &= (4,3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(4,3)\| \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{16+9}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (5,5) - (1,2) \\ &= (5-1, 5-2) \\ &= (4,3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(4,3)\| \\ &= \sqrt{4^2+3^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (5,5) - (1,2) \\ &= (5-1, 5-2) \\ &= (4,3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(4,3)\| \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule a distância entre

$A = (-2, 3)$

$B = (4, -5)$

Exemplo 2 – Solução

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-2, 3) - (4, -5)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-2, 3) - (4, -5) \\ &= (6, -8)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-2, 3) - (4, -5) \\ &= (6, -8)\end{aligned}$$

$$d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-2, 3) - (4, -5) \\ &= (6, -8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(6, -8)\|\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-2, 3) - (4, -5) \\ &= (6, -8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(6, -8)\| \\ &= \sqrt{6^2 + (-8)^2}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-2, 3) - (4, -5) \\ &= (6, -8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(6, -8)\| \\ &= \sqrt{6^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-2, 3) - (4, -5) \\ &= (6, -8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(6, -8)\| \\ &= \sqrt{6^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-2, 3) - (4, -5) \\ &= (6, -8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(6, -8)\| \\ &= \sqrt{6^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10\end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule a distância entre

$A = (1, -2, 3)$

$B = (4, 2, -1)$

Exemplo 3 – Solução

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (4, 2, -1) - (1, -2, 3)\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (4, 2, -1) - (1, -2, 3) \\ &= (4 - 1, 2 - (-2), -1 - 3)\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (4, 2, -1) - (1, -2, 3) \\ &= (4 - 1, 2 - (-2), -1 - 3) \\ &= (3, 4, -4)\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (4, 2, -1) - (1, -2, 3) \\ &= (4 - 1, 2 - (-2), -1 - 3) \\ &= (3, 4, -4)\end{aligned}$$

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (4, 2, -1) - (1, -2, 3) \\ &= (4 - 1, 2 - (-2), -1 - 3) \\ &= (3, 4, -4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(3, 4, -4)\|\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (4, 2, -1) - (1, -2, 3) \\ &= (4 - 1, 2 - (-2), -1 - 3) \\ &= (3, 4, -4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(3, 4, -4)\| \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2 + (-4)^2}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (4, 2, -1) - (1, -2, 3) \\ &= (4 - 1, 2 - (-2), -1 - 3) \\ &= (3, 4, -4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(3, 4, -4)\| \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 16}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (4, 2, -1) - (1, -2, 3) \\ &= (4 - 1, 2 - (-2), -1 - 3) \\ &= (3, 4, -4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(3, 4, -4)\| \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 16} \\ &= \sqrt{41}\end{aligned}$$

Exemplo 4

Determine o valor de k para que a distância entre

$$A = (k, 2)$$

$$B = (3, -2)$$

seja igual a 5

Exemplo 4 – Solução

$d(A, B)$

Exemplo 4 – Solução

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + (-2-2)^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + (-2-2)^2} \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + 16}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + (-2-2)^2} \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + 16}
\end{aligned}
$$

$$d(A,B) = 5$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + (-2-2)^2} \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + 16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= 5 \\
\sqrt{(3-k)^2 + 16} &= 5
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + (-2-2)^2} \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + 16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= 5 \\
\sqrt{(3-k)^2 + 16} &= 5 \\
(3-k)^2 + 16 &= 25
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + (-2-2)^2} \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + 16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= 5 \\
\sqrt{(3-k)^2 + 16} &= 5 \\
(3-k)^2 + 16 &= 25 \\
(3-k)^2 &= 9
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + (-2-2)^2} \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + 16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= 5 \\
\sqrt{(3-k)^2 + 16} &= 5 \\
(3-k)^2 + 16 &= 25 \\
(3-k)^2 &= 9 \\
|3-k| &= 3
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + (-2-2)^2} \\
&= \sqrt{(3-k)^2 + 16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= 5 \\
\sqrt{(3-k)^2 + 16} &= 5 \\
(3-k)^2 + 16 &= 25 \\
(3-k)^2 &= 9 \\
|3-k| &= 3 \\
3-k &= \pm 3
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

$$3 - k = 3$$

Exemplo 4 – Solução

$$3 - k = 3$$

$$-k = 0$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
3 - k &= 3 \\
-k &= 0 \\
k &= 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

$$3 - k = 3$$

$$-k = 0$$

$$k = 0$$

$$3 - k = -3$$

Exemplo 4 – Solução

$$3 - k = 3$$
$$-k = 0$$
$$k = 0$$

$$3 - k = -3$$
$$-k = -6$$

Exemplo 4 – Solução

$$3 - k = 3$$
$$-k = 0$$
$$k = 0$$

$$3 - k = -3$$
$$-k = -6$$
$$k = 6$$

Exemplo 4 – Solução

$$3 - k = 3$$
$$-k = 0$$
$$k = 0$$

$$3 - k = -3$$
$$-k = -6$$
$$k = 6$$

Portanto, $k = 0$ ou $k = 6$

Conteúdo

Distância entre Pontos

Propriedades da Distância

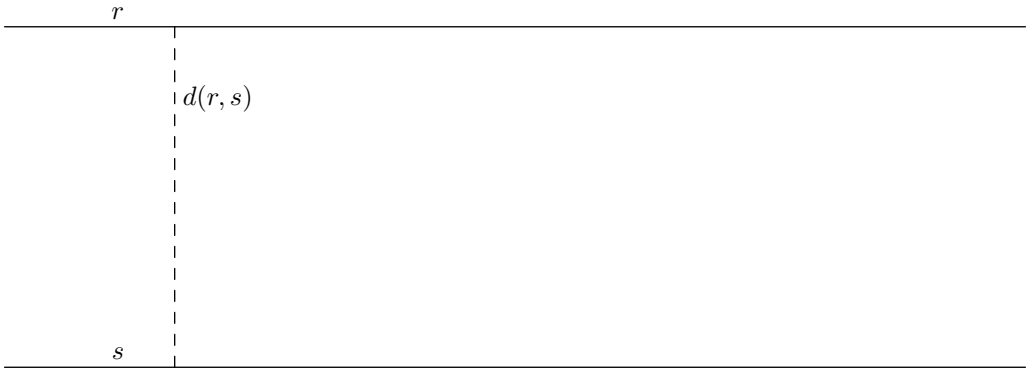
Distância entre Retas Paralelas

Distância de Ponto a Plano

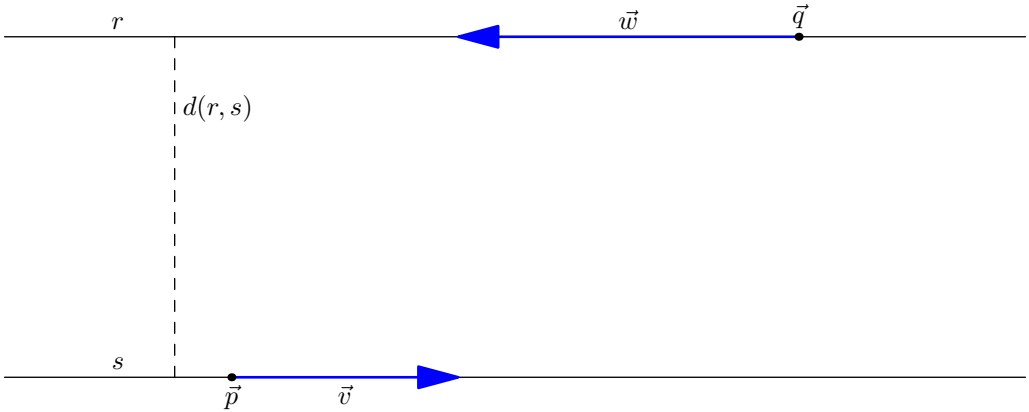
Distância entre Retas Paralelas



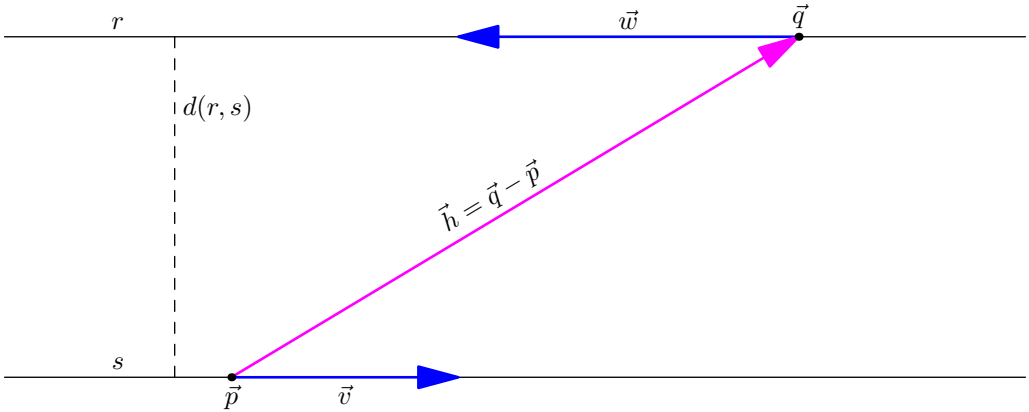
Distância entre Retas Paralelas



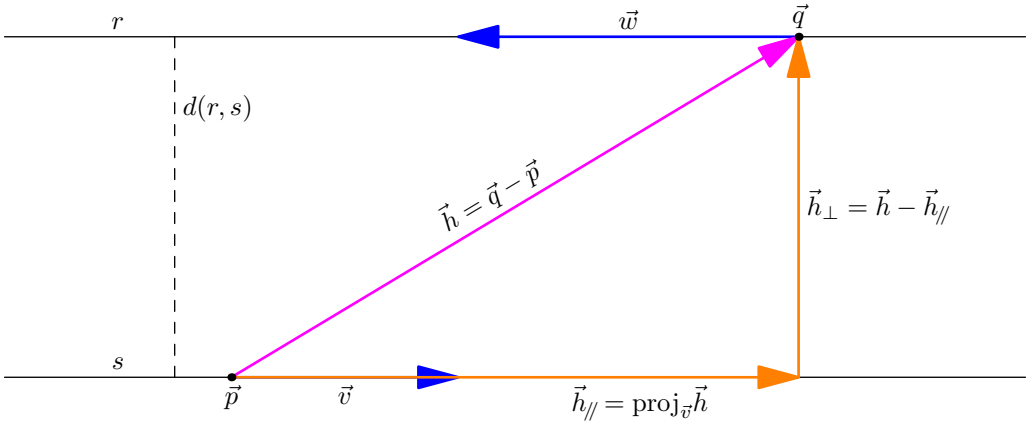
Distância entre Retas Paralelas



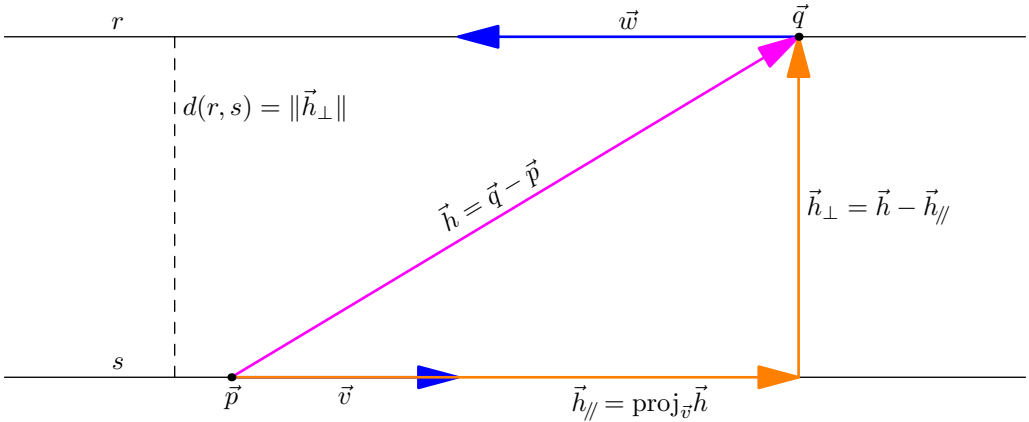
Distância entre Retas Paralelas



Distância entre Retas Paralelas



Distância entre Retas Paralelas



Distância entre Retas Paralelas

A distância entre as retas paralelas

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v} \qquad s\colon \vec{r} = \vec{q} + \tau\vec{w} \qquad \vec{w} = \lambda\vec{v}$$

Distância entre Retas Paralelas

A distância entre as retas paralelas

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v} \qquad s\colon \vec{r} = \vec{q} + \tau\vec{w} \qquad \vec{w} = \lambda\vec{v}$$

é a norma da componente perpendicular da decomposição de

$$\vec{h} = \vec{q} - \vec{p}$$

Distância entre Retas Paralelas

A distância entre as retas paralelas

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v} \qquad s\colon \vec{r} = \vec{q} + \tau\vec{w} \qquad \vec{w} = \lambda\vec{v}$$

é a norma da componente perpendicular da decomposição de

$$\vec{h} = \vec{q} - \vec{p}$$

com relação ao vetor diretor $\vec{v}$

Distância entre Retas Paralelas

A distância entre as retas paralelas

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v} \qquad s\colon \vec{r} = \vec{q} + \tau\vec{w} \qquad \vec{w} = \lambda\vec{v}$$

é a norma da componente perpendicular da decomposição de

$$\vec{h} = \vec{q} - \vec{p}$$

com relação ao vetor diretor $\vec{v}$

$$d(r, s)$$

Distância entre Retas Paralelas

A distância entre as retas paralelas

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v} \qquad s\colon \vec{r} = \vec{q} + \tau\vec{w} \qquad \vec{w} = \lambda\vec{v}$$

é a norma da componente perpendicular da decomposição de

$$\vec{h} = \vec{q} - \vec{p}$$

com relação ao vetor diretor $\vec{v}$

$$d(r, s) = \left\|\vec{h}_{\perp}\right\|$$

Distância entre Retas Paralelas

A distância entre as retas paralelas

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v} \qquad s\colon \vec{r} = \vec{q} + \tau\vec{w} \qquad \vec{w} = \lambda\vec{v}$$

é a norma da componente perpendicular da decomposição de

$$\vec{h} = \vec{q} - \vec{p}$$

com relação ao vetor diretor $\vec{v}$

$$d(r,s) = \left\|\vec{h}_{\perp}\right\| = \left\|\vec{h} - \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{h}\right\|$$

Distância entre Retas Paralelas

A distância entre as retas paralelas

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v} \qquad s\colon \vec{r} = \vec{q} + \tau\vec{w} \qquad \vec{w} = \lambda\vec{v}$$

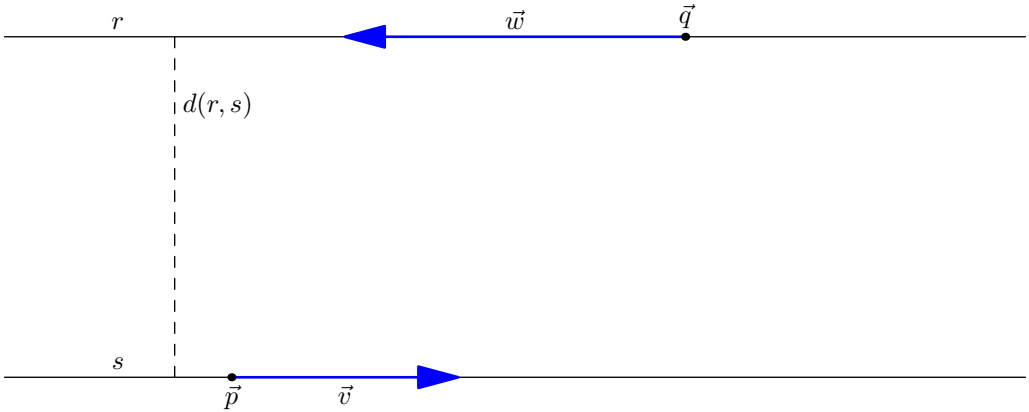
é a norma da componente perpendicular da decomposição de

$$\vec{h} = \vec{q} - \vec{p}$$

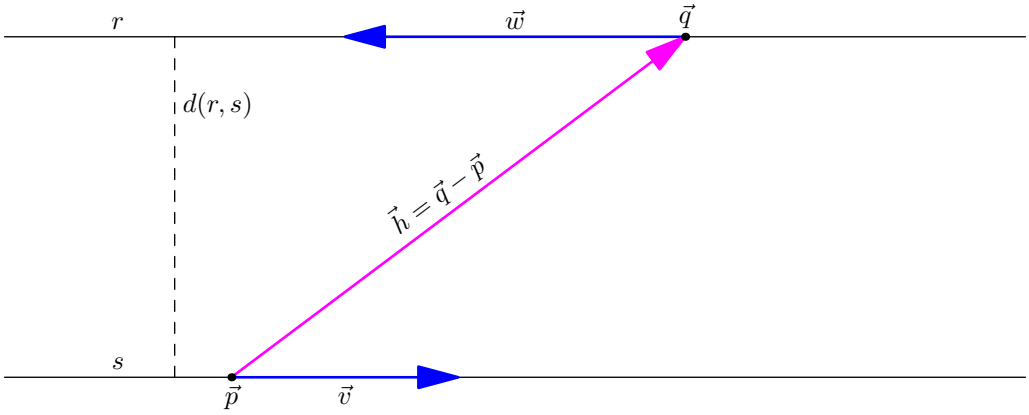
com relação ao vetor diretor $\vec{v}$

$$d(r,s) = \left\|\vec{h}_{\perp}\right\| = \left\|\vec{h} - \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{h}\right\| = \left\|\vec{h} - \frac{\vec{h}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right\|$$

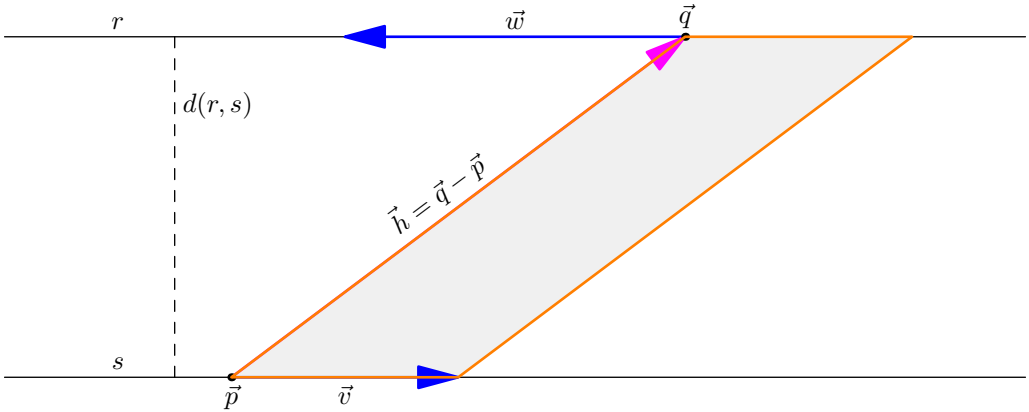
Fórmula Alternativa



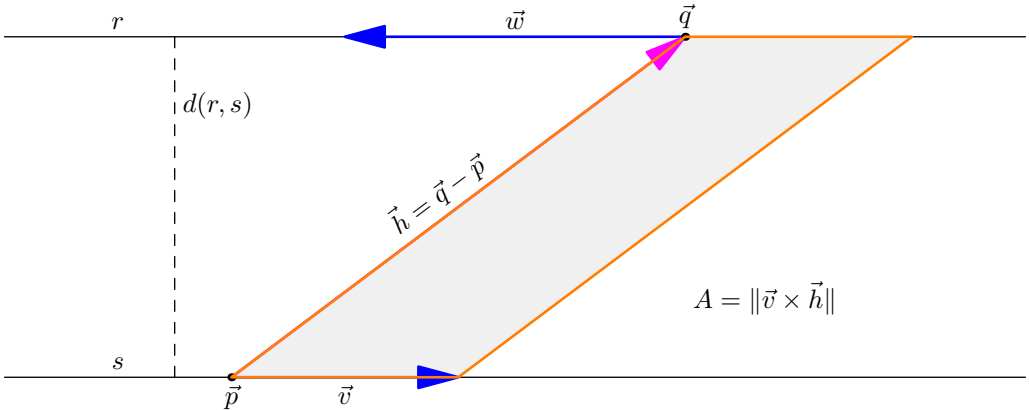
Fórmula Alternativa



Fórmula Alternativa



Fórmula Alternativa



Fórmula Alternativa

Área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{h}$

Fórmula Alternativa

Área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{h}$

$$A = \left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

Fórmula Alternativa

Área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{h}$

$$A = \left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

$$A$$

Fórmula Alternativa

Área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{h}$

$$A = \left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

$$A = \text{base} \times \text{altura}$$

Fórmula Alternativa

Área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{h}$

$$A = \left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

$$A = \text{base} \times \text{altura} = \|\vec{v}\| \, d(r, s)$$

Fórmula Alternativa

Área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{h}$

$$A = \left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

$$A = \text{base} \times \text{altura} = \|\vec{v}\| \, d(r, s)$$

$$\|\vec{v}\| \, d(r, s) = \left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

Fórmula Alternativa

Área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{h}$

$$A = \left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

$$A = \text{base} \times \text{altura} = \|\vec{v}\| \, d(r, s)$$

$$\|\vec{v}\| \, d(r, s) = \left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

$$d(r, s) = \frac{\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|}{\|\vec{v}\|}$$

Fórmula Alternativa

Área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{h}$

$$A = \left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

$$A = \text{base} \times \text{altura} = \|\vec{v}\| \, d(r,s)$$

$$\|\vec{v}\| \, d(r,s) = \left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

$$d(r,s) = \frac{\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|(\vec{q} - \vec{q}) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Exemplo 5

Calcule a distância entre as retas

$$r\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 1 + \tau \\ y = 3 + \tau \\ z = 4 \end{cases}$$

Exemplo 5 – Solução

Vetores diretores

$$\vec{w} = \vec{v} = (1, 1, 0)$$

Exemplo 5 – Solução

Vetores diretores

$$\vec{w} = \vec{v} = (1, 1, 0)$$

Ponto em r

$$P = (0, 1, 2)$$

Exemplo 5 – Solução

Vetores diretores

$$\vec{w} = \vec{v} = (1, 1, 0)$$

Ponto em r

$$P = (0, 1, 2)$$

Ponto em s

$$Q = (1, 3, 4)$$

Exemplo 5 – Solução

$\vec{h}$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1, 3, 4) - (0, 1, 2)$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1, 3, 4) - (0, 1, 2) = (1, 2, 2)$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1, 3, 4) - (0, 1, 2) = (1, 2, 2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1, 3, 4) - (0, 1, 2) = (1, 2, 2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1, 3, 4) - (0, 1, 2) = (1, 2, 2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 2, -1)$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1,3,4) - (0,1,2) = (1,2,2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$$

$$\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\|$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1,3,4) - (0,1,2) = (1,2,2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$$

$$\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\| = \sqrt{4+4+1}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1,3,4) - (0,1,2) = (1,2,2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$$

$$\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1,3,4) - (0,1,2) = (1,2,2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$$

$$\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\|\vec{v}\|$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1,3,4) - (0,1,2) = (1,2,2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$$

$$\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1,3,4) - (0,1,2) = (1,2,2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$$

$$\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1,3,4) - (0,1,2) = (1,2,2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$$

$$\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$d(r,s)$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1,3,4) - (0,1,2) = (1,2,2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$$

$$\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$d(r,s) = \frac{\left\| (\vec{h}) \times \vec{v} \right\|}{\|\vec{v}\|}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\vec{h} = Q - P = (1,3,4) - (0,1,2) = (1,2,2)$$

$$\vec{h} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$$

$$\left\| \vec{h} \times \vec{v} \right\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$d(r,s) = \frac{\left\| (\vec{h}) \times \vec{v} \right\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Conteúdo

Distância entre Pontos

Propriedades da Distância

Distância entre Retas Paralelas

Distância de Ponto a Plano

Distância de um Ponto a um Plano

Dados o plano γ e o ponto P

$$\gamma\colon ax + by + cz + d = 0 \qquad\qquad P = (x_0, y_0, z_0)$$

Distância de um Ponto a um Plano

Dados o plano γ e o ponto P

$$\gamma\colon ax + by + cz + d = 0 \qquad\qquad P = (x_0, y_0, z_0)$$

A distância de P ao plano é

Distância de um Ponto a um Plano

Dados o plano γ e o ponto P

$$\gamma\colon ax + by + cz + d = 0 \qquad\qquad P = (x_0, y_0, z_0)$$

A distância de P ao plano é

$$d(P, \gamma)$$

Distância de um Ponto a um Plano

Dados o plano γ e o ponto P

$$\gamma\colon ax + by + cz + d = 0 \qquad\qquad P = (x_0, y_0, z_0)$$

A distância de P ao plano é

$$d(P, \gamma) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\|\vec{n}\|}$$

Distância de um Ponto a um Plano

Dados o plano γ e o ponto P

$$\gamma\colon ax + by + cz + d = 0 \qquad\qquad P = (x_0, y_0, z_0)$$

A distância de P ao plano é

$$d(P, \gamma) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\|\vec{n}\|} \qquad\qquad \vec{n} = (a, b, c)$$

Exemplo 6

Calcule a distância do ponto

$$P = (2, -1, 3)$$

ao plano

$$\gamma\colon\ 2x - y + 2z - 5 = 0$$

Exemplo 6 – Solução

Vetor normal do plano

Exemplo 6 – Solução

Vetor normal do plano

$$\vec{n} = (2, -1, 2)$$

Exemplo 6 – Solução

Vetor normal do plano

$$\vec{n} = (2, -1, 2)$$

$$\|\vec{n}\|$$

Exemplo 6 – Solução

Vetor normal do plano

$$\vec{n} = (2, -1, 2)$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

Exemplo 6 – Solução

Vetor normal do plano

$$\vec{n} = (2, -1, 2)$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Exemplo 6 – Solução

Vetor normal do plano

$$\vec{n} = (2, -1, 2)$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Expressão do plano no ponto $P = (2, -1, 3)$

Exemplo 6 – Solução

Vetor normal do plano

$$\vec{n} = (2, -1, 2)$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Expressão do plano no ponto $P = (2, -1, 3)$

$$2x_0 - y_0 + 2z_0 - 5$$

Exemplo 6 – Solução

Vetor normal do plano

$$\vec{n} = (2, -1, 2)$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Expressão do plano no ponto $P = (2, -1, 3)$

$$2x_0 - y_0 + 2z_0 - 5 = 2(2) - (-1) + 2(3) - 5$$

Exemplo 6 – Solução

Vetor normal do plano

$$\vec{n} = (2, -1, 2)$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Expressão do plano no ponto $P = (2, -1, 3)$

$$\begin{aligned} 2x_0 - y_0 + 2z_0 - 5 &= 2(2) - (-1) + 2(3) - 5 \\ &= 4 + 1 + 6 - 5 \end{aligned}$$

Exemplo 6 – Solução

Vetor normal do plano

$$\vec{n} = (2, -1, 2)$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Expressão do plano no ponto $P = (2, -1, 3)$

$$\begin{aligned} 2x_0 - y_0 + 2z_0 - 5 &= 2(2) - (-1) + 2(3) - 5 \\ &= 4 + 1 + 6 - 5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Exemplo 6 – Solução

Distância

$$d(P, \gamma)$$

Exemplo 6 – Solução

Distância

$$d(P, \gamma) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\|\vec{n}\|}$$

Exemplo 6 – Solução

Distância

$$d(P,\gamma) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|6|}{3}$$

Exemplo 6 – Solução

Distância

$$d(P, \gamma) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|6|}{3} = 2$$