Ângulos entre Vetores, Retas e Planos

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

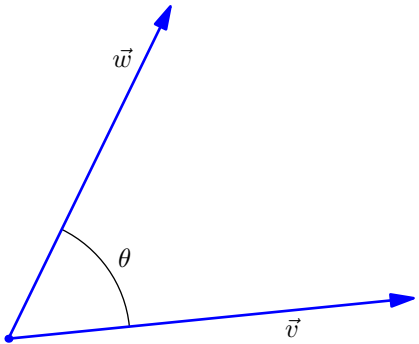
Ângulo entre Vetores

Ângulo entre Retas

Ângulo entre Reta e Plano

Ângulo entre Planos

Ângulo entre Vetores



Ângulo entre Vetores

Sejam $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$

Ângulo entre Vetores

Sejam $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$

O ângulo θ entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ satisfaz

Ângulo entre Vetores

Sejam $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$

O ângulo θ entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

Ângulo entre Vetores

Sejam $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$

O ângulo θ entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

com

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Exemplo 1

Determine o ângulo entre

$\vec{v} = (1, 2, 2)$

$\vec{w} = (2, -1, 2)$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2$$
$$= 2 - 2 + 4 = 4$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2$$
$$= 2 - 2 + 4 = 4$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2$$
$$= 2 - 2 + 4 = 4$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2$$
$$= 2 - 2 + 4 = 4$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2$$

$$= 2 - 2 + 4 = 4$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{4}{9}\right)$$

Conteúdo

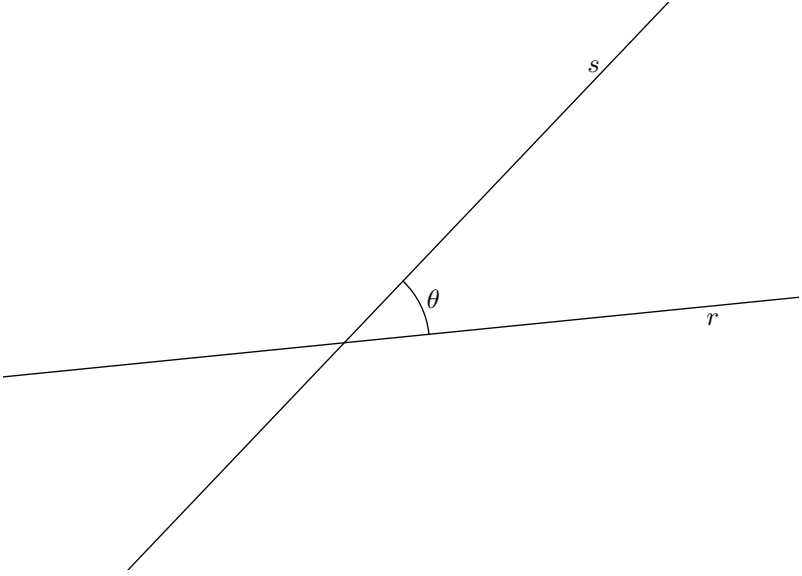
Ângulo entre Vetores

Ângulo entre Retas

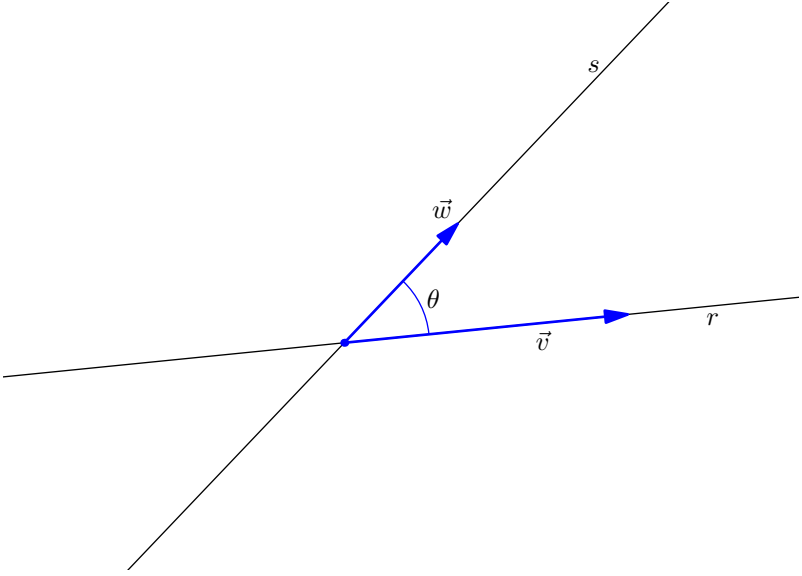
Ângulo entre Reta e Plano

Ângulo entre Planos

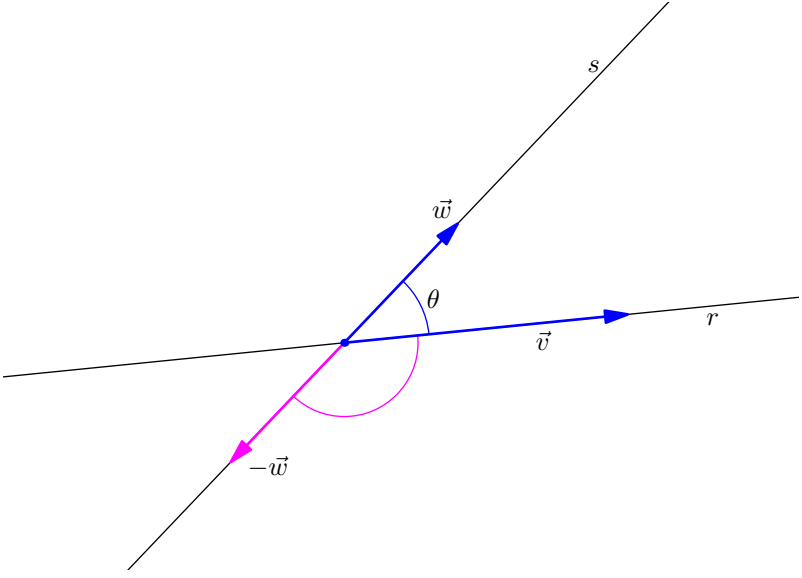
Ângulo entre Retas



Ângulo entre Retas



Ângulo entre Retas



Ângulo entre Retas

Considere duas retas

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v}$$

$$s\colon \vec{r} = \vec{q} + \tau\vec{w}$$

Ângulo entre Retas

Considere duas retas

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v}$$

$$s\colon \vec{r} = \vec{q} + \tau\vec{w}$$

Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores diretores das retas

Ângulo entre Retas

O ângulo entre as retas é determinado pelos vetores diretores

Ângulo entre Retas

O ângulo entre as retas é determinado pelos vetores diretores

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

Ângulo entre Retas

O ângulo entre as retas é determinado pelos vetores diretores

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Ângulo entre Retas

O ângulo entre as retas é determinado pelos vetores diretores

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Por que o módulo?

Ângulo entre Retas

O ângulo entre as retas é determinado pelos vetores diretores

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Por que o módulo?

Os vetores $\vec{v}$ e $-\vec{v}$ determinam a mesma direção em uma reta

Exemplo 2

Determine o ângulo entre as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + \tau \\ y = 1 - \tau \\ z = 4 + 2\tau \end{cases}$$

Exemplo 2 – Solução

Vetores diretores

Exemplo 2 – Solução

Vetores diretores

$$\vec{v} = (1, 2, -1)$$

Exemplo 2 – Solução

Vetores diretores

$$\vec{v} = (1, 2, -1)$$

$$\vec{w} = (1, -1, 2)$$

Exemplo 2 – Solução

Vetores diretores

$$\vec{v} = (1, 2, -1)$$

$$\vec{w} = (1, -1, 2)$$

Produto escalar

Exemplo 2 – Solução

Vetores diretores

$$\vec{v} = (1, 2, -1)$$

$$\vec{w} = (1, -1, 2)$$

Produto escalar

$$\vec{v} \cdot \vec{w}$$

Exemplo 2 – Solução

Vetores diretores

$$\vec{v} = (1, 2, -1)$$

$$\vec{w} = (1, -1, 2)$$

Produto escalar

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2$$

Exemplo 2 – Solução

Vetores diretores

$$\vec{v} = (1, 2, -1)$$

$$\vec{w} = (1, -1, 2)$$

Produto escalar

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \\ &= 1 - 2 - 2 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

Vetores diretores

$$\vec{v} = (1, 2, -1)$$

$$\vec{w} = (1, -1, 2)$$

Produto escalar

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \\ &= 1 - 2 - 2 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\|$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{w}\|$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}}$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6}$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2 – Solução

Normas

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Retas Paralelas

Se os vetores diretores são paralelos

$$\vec{w} = \lambda \vec{v}$$

Retas Paralelas

Se os vetores diretores são paralelos

$$\vec{w} = \lambda \vec{v}$$

então

$$\theta = 0$$

Retas Ortogonais

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Retas Ortogonais

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

então

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Retas Ortogonais

Se

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

então

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

As retas são ortogonais

Conteúdo

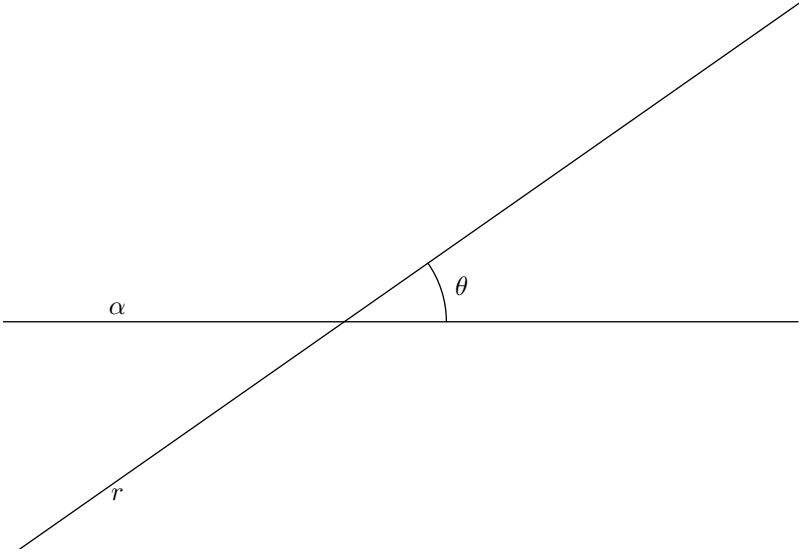
Ângulo entre Vetores

Ângulo entre Retas

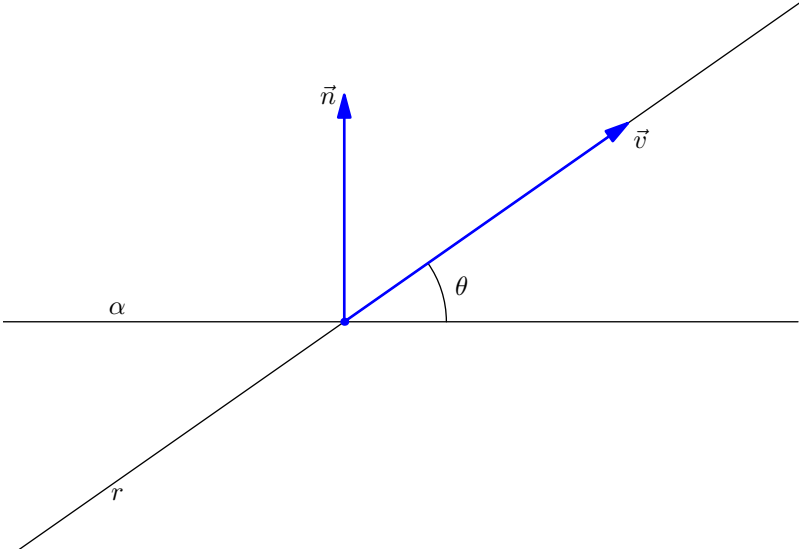
Ângulo entre Reta e Plano

Ângulo entre Planos

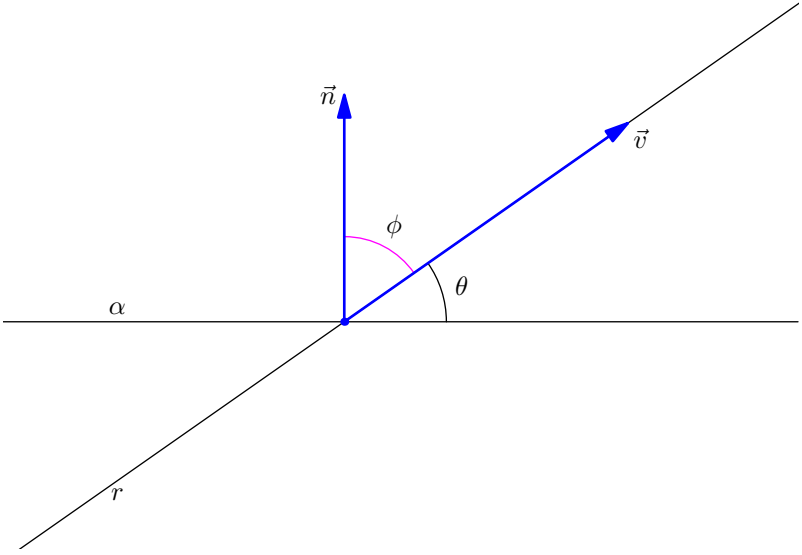
Ângulo entre Retas



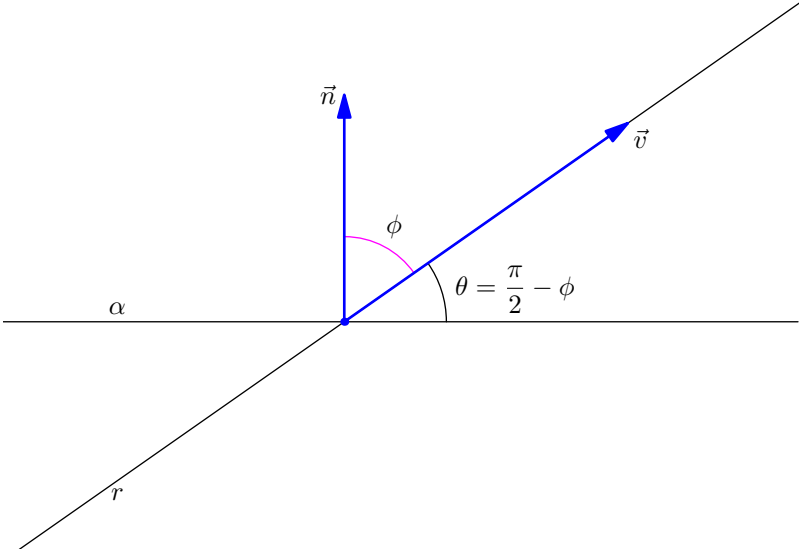
Ângulo entre Retas



Ângulo entre Retas



Ângulo entre Retas



Reta e Plano

Dada a reta

$$r : \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v}$$

Reta e Plano

Dada a reta

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v}$$

e o plano

$$\gamma\colon ax + by + cz + d = 0$$

Reta e Plano

Dada a reta

$$r\colon \vec{r} = \vec{p} + t\vec{v}$$

e o plano

$$\gamma\colon ax + by + cz + d = 0$$

com vetor normal

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

Ângulo entre Reta e Plano

Se θ é o ângulo entre a reta e o plano

Ângulo entre Reta e Plano

Se θ é o ângulo entre a reta e o plano

e ϕ é o ângulo entre o vetor diretor e o vetor normal

Ângulo entre Reta e Plano

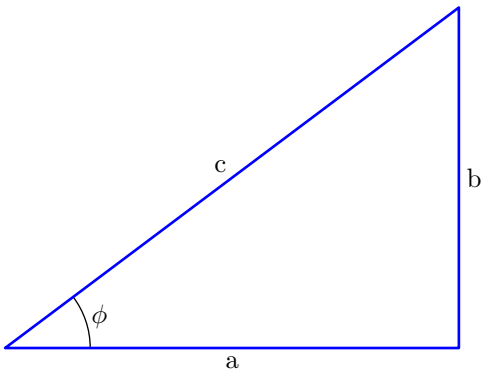
Se θ é o ângulo entre a reta e o plano

e ϕ é o ângulo entre o vetor diretor e o vetor normal

Então

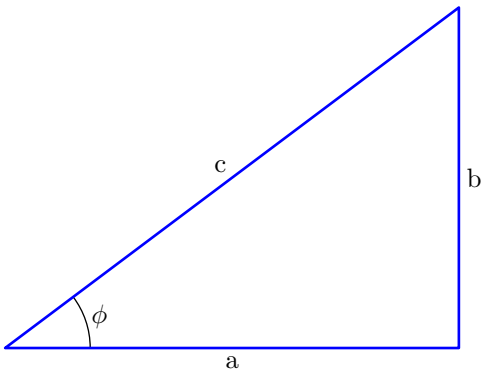
$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$$

Relação entre θ e ϕ



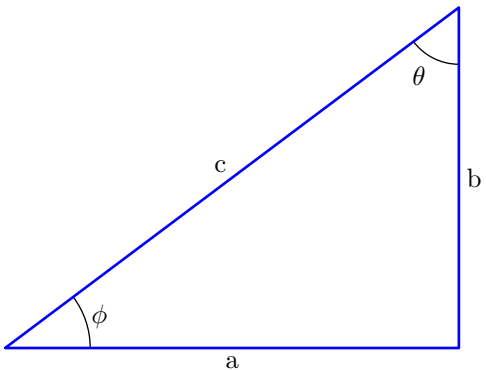
Relação entre θ e ϕ

$$\cos\phi = \frac{a}{c}$$



Relação entre θ e ϕ

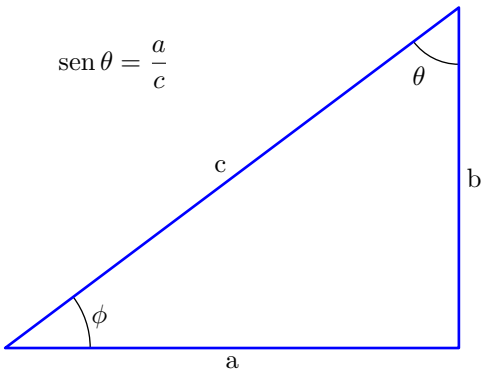
$$\cos\phi = \frac{a}{c}$$



Relação entre θ e ϕ

$$\cos\phi = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{c}$$



Fórmula

Ângulo entre uma reta e um plano

Fórmula

Ângulo entre uma reta e um plano

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|}$$

Fórmula

Ângulo entre uma reta e um plano

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|}$$

com

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 3

Determine o ângulo entre a reta

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

e o plano

$$\alpha\colon x - 2y + 2z - 5 = 0$$

Exemplo 3 – Solução

Vetor diretor da reta

$$\vec{v} = (1, 2, 1)$$

Exemplo 3 – Solução

Vetor diretor da reta

$$\vec{v} = (1, 2, 1)$$

Vetor normal ao plano

$$\vec{n} = (1, -2, 2)$$

Exemplo 3 – Solução

$\vec{v} \cdot \vec{n}$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2$$

Exemplo 3 – Solução

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2$$

$$= 1 - 4 + 2$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ &= 1 - 4 + 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ &= 1 - 4 + 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$\|\vec{v}\|$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ &= 1 - 4 + 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ &= 1 - 4 + 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{6}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ &= 1 - 4 + 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\|\vec{n}\|$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ &= 1 - 4 + 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ &= 1 - 4 + 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{n}\| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$\operatorname{sen} \theta$

Exemplo 3 – Solução

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|-1|}{\sqrt{6}\cdot 3}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta &= \frac{|-1|}{\sqrt{6}\cdot 3}\\ &= \frac{1}{3\sqrt{6}}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|-1|}{\sqrt{6}\cdot 3}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$$

Conteúdo

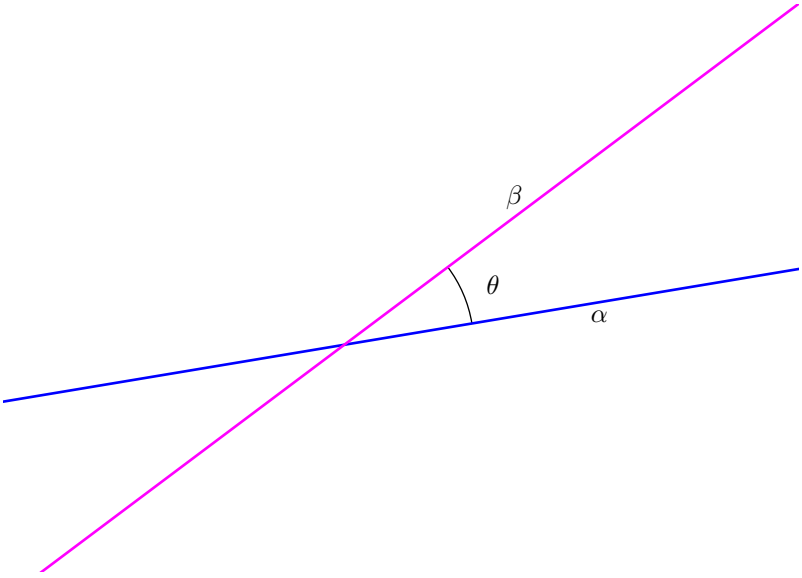
Ângulo entre Vetores

Ângulo entre Retas

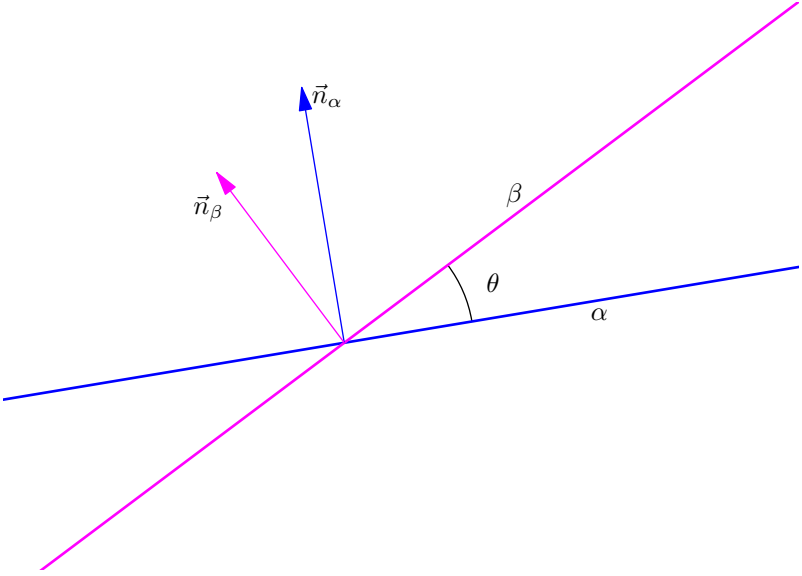
Ângulo entre Reta e Plano

Ângulo entre Planos

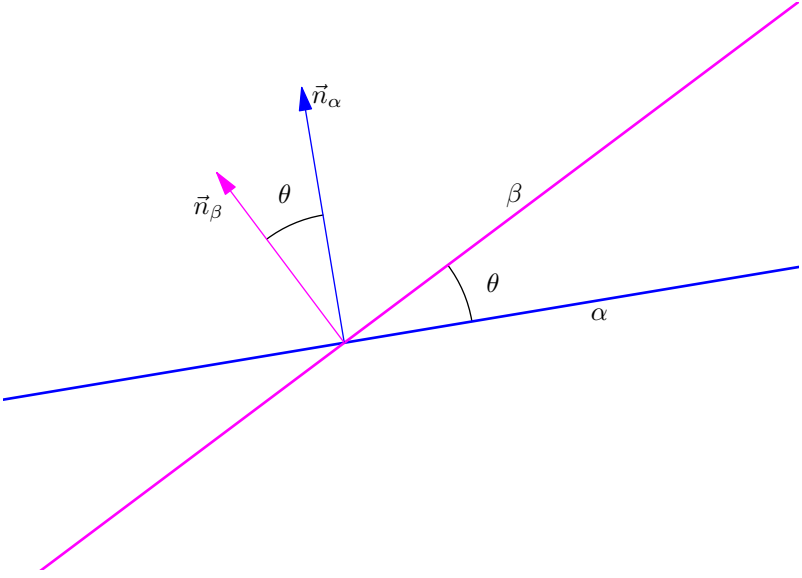
Ângulo entre Retas



Ângulo entre Retas



Ângulo entre Retas



Ângulo entre dois planos

Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores normais aos planos

Ângulo entre dois planos

Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores normais aos planos

O ângulo entre os dois planos é

Ângulo entre dois planos

Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores normais aos planos

O ângulo entre os dois planos é

$$\cos\theta$$

Ângulo entre dois planos

Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores normais aos planos

O ângulo entre os dois planos é

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$$

Ângulo entre dois planos

Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores normais aos planos

O ângulo entre os dois planos é

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$$

O módulo permite escolher o menor ângulo entre os planos

Exemplo 4

Determine o ângulo entre os planos

$$\alpha\colon x + y + z - 1 = 0$$

$$\beta\colon 2x - y + 2z + 3 = 0$$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ $\vec{n}_2 = (2, -1, 2)$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ $\vec{n}_2 = (2, -1, 2)$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ $\vec{n}_2 = (2, -1, 2)$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1) \qquad \vec{n}_2 = (2, -1, 2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1) \qquad \vec{n}_2 = (2, -1, 2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|\vec{n}_1\|$$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1) \qquad \vec{n}_2 = (2, -1, 2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{3}$$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ $\vec{n}_2 = (2, -1, 2)$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$

$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{3}$

$\|\vec{n}_2\|$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1) \qquad \vec{n}_2 = (2, -1, 2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{4 + 1 + 4}$$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1) \qquad \vec{n}_2 = (2, -1, 2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1) \qquad \vec{n}_2 = (2, -1, 2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

$$\cos\theta$$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1) \qquad \vec{n}_2 = (2, -1, 2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{3}}$$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1) \qquad \vec{n}_2 = (2, -1, 2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exemplo 4 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1) \qquad \vec{n}_2 = (2, -1, 2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Exemplo 5

Determine o ângulo entre os planos

$$\alpha\colon x + 2y + 2z - 1 = 0$$

$$\beta\colon 2x - y + 2z + 3 = 0$$

Exemplo 5 – Solução

Vetores normais

Exemplo 5 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_\alpha = (1, 2, 2)$$

Exemplo 5 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_\alpha = (1, 2, 2)$$

$$\vec{n}_\beta = (2, -1, 2)$$

Exemplo 5 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_\alpha = (1, 2, 2)$$

$$\vec{n}_\beta = (2, -1, 2)$$

Produto escalar

Exemplo 5 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_\alpha = (1, 2, 2)$$

$$\vec{n}_\beta = (2, -1, 2)$$

Produto escalar

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta$$

Exemplo 5 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_\alpha = (1, 2, 2)$$

$$\vec{n}_\beta = (2, -1, 2)$$

Produto escalar

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2$$

Exemplo 5 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_\alpha = (1, 2, 2)$$

$$\vec{n}_\beta = (2, -1, 2)$$

Produto escalar

$$\begin{aligned} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ &= 2 - 2 + 4 \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Vetores normais

$$\vec{n}_\alpha = (1, 2, 2)$$

$$\vec{n}_\beta = (2, -1, 2)$$

Produto escalar

$$\begin{aligned} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ &= 2 - 2 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Normas

Exemplo 5 – Solução

Normas

$\|\vec{n}_1\|$

Exemplo 5 – Solução

Normas

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$$

Exemplo 5 – Solução

Normas

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$$
$$= 3$$

Exemplo 5 – Solução

Normas

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$$
$$= 3$$

$$\|\vec{n}_2\|$$

Exemplo 5 – Solução

Normas

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$$
$$= 3$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

Exemplo 5 – Solução

Normas

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$$
$$= 3$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}$$
$$= 3$$

Exemplo 5 – Solução

$\cos\theta$

Exemplo 5 – Solução

$$\cos\theta = \frac{4}{3 \cdot 3}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{4}{3 \cdot 3} \\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\cos\theta = \frac{4}{3 \cdot 3}$$
$$= \frac{4}{9}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{4}{9}\right)$$