Espaços Vetoriais

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Espaços Vetoriais

Espaços Vetoriais Usuais

Motivação

- Vetores aparecem em diferentes contextos

Motivação

- Vetores aparecem em diferentes contextos
- As operações podem ter naturezas diferentes

Motivação

- Vetores aparecem em diferentes contextos
- As operações podem ter naturezas diferentes
- A mesma estrutura algébrica está presente em todos eles

Abstração

O vetor não precisa ser uma seta

Abstração

O vetor não precisa ser uma seta

Qualquer elemento matemático que podemos

Abstração

O vetor não precisa ser uma seta

Qualquer elemento matemático que podemos

1. somar

Abstração

O vetor não precisa ser uma seta

Qualquer elemento matemático que podemos

1. somar
2. multiplicar por escalar

Abstração

O vetor não precisa ser uma seta

Qualquer elemento matemático que podemos

1. somar
2. multiplicar por escalar

Pode ser pensado como vetor

Corpo

Um conjunto K que possui operações de soma e produto

Corpo

Um conjunto K que possui operações de soma e produto

com as mesmas propriedades da soma e produto dos números reais

Corpo

Um conjunto K que possui operações de soma e produto

com as mesmas propriedades da soma e produto dos números reais

é chamado de Corpo

Espaços Vetoriais

Um Espaço vetorial consiste de

Espaços Vetoriais

Um Espaço vetorial consiste de

um conjunto V

Espaços Vetoriais

Um Espaço vetorial consiste de

- um conjunto V
- um corpo K

Espaços Vetoriais

Um Espaço vetorial consiste de

um conjunto V

um corpo K

uma operação de soma $+ : V \times V \to V$

Espaços Vetoriais

Um Espaço vetorial consiste de

- um conjunto V
- um corpo K
- uma operação de soma $+ : V \times V \to V$
- um produto dor escalar $\cdot : V \times K \to V$

Operações

Para quais quer $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e $\alpha \in K$

Operações

Para quais quer $\vec{v},\ \vec{w} \in V$ e $\alpha \in K$

$$\vec{v} + \vec{w} \in V$$

Operações

Para quais quer $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e $\alpha \in K$

$\vec{v} + \vec{w} \in V$

$\alpha\vec{v} \in V$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e α, $\beta \in K$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}\,,\ \vec{v}\,,\ \vec{w} \in V$ e $\alpha\,,\ \beta \in K$

$$\vec{u} + \vec{v} \ = \ \vec{v} + \vec{u}$$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}\,,\ \vec{v}\,,\ \vec{w} \in V$ e $\alpha\,,\ \beta \in K$

$$\vec{u} + \vec{v} \ = \ \vec{v} + \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \ = \ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}\,,\ \vec{v}\,,\ \vec{w} \in V$ e $\alpha\,,\ \beta \in K$

$$\vec{u} + \vec{v} \ = \ \vec{v} + \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \ = \ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\exists\, \vec{0} \in V \qquad \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}\,,\ \vec{v}\,,\ \vec{w} \in V$ e $\alpha\,,\ \beta \in K$

$$\vec{u} + \vec{v} \ = \ \vec{v} + \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \ = \ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\exists\, \vec{0} \in V \qquad \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

$$\forall\, \vec{v} \in V \qquad \exists\, (-\vec{v}) \in V \qquad \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}\,,\ \vec{v} \in V$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ e α, $\beta \in K$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}\,,\ \vec{v} \in V$ e $\alpha\,,\ \beta \in K$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) \ = \ \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}\,,\ \vec{v} \in V$ e $\alpha\,,\ \beta \in K$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) \ = \ \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{v} \ = \ \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}\,,\ \vec{v} \in V$ e $\alpha\,,\ \beta \in K$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) \ = \ \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{v} \ = \ \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$$

$$\alpha(\beta\vec{v}) \ = \ (\alpha\beta)\vec{v}$$

Axiomas

Para quaisquer $\vec{u}\,,\ \vec{v} \in V$ e $\alpha\,,\ \beta \in K$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) \ = \ \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{v} \ = \ \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$$

$$\alpha(\beta\vec{v}) \ = \ (\alpha\beta)\vec{v}$$

$$1\vec{v} \ = \ \vec{v}$$

Conteúdo

Espaços Vetoriais

Espaços Vetoriais Usuais

O espaço $\mathbb{R}^2$

Conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

O espaço $\mathbb{R}^2$

Conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Soma

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,, y_1 + y_2)$$

O espaço $\mathbb{R}^2$

Conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Soma

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,, y_1 + y_2)$$

Produto por escalar

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

O espaço $\mathbb{R}^n$

Conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

O espaço $\mathbb{R}^n$

Conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

Soma

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

O espaço $\mathbb{R}^n$

Conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

Soma

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Produto por escalar

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

Polinômios de Grau n

Conjunto

$$\mathcal{P}_n = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

Polinômios de Grau n

Conjunto

$$\mathcal{P}_n = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

Soma

$$p(x) + q(x)$$

Polinômios de Grau n

Conjunto

$$\mathcal{P}_n = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

Soma

$$p(x) + q(x)$$

Produto por escalar

$$\alpha p(x)$$

Funções Reais

Conjunto de todas as funções reais de variável real

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Funções Reais

Conjunto de todas as funções reais de variável real

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Soma

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Funções Reais

Conjunto de todas as funções reais de variável real

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Soma

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Produto por escalar

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Matrizes

Conjunto das matrizes reais

$$M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Matrizes

Conjunto das matrizes reais

$$M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrizes

Conjunto das matrizes reais

$$M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Soma

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Matrizes

Conjunto das matrizes reais

$$M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Soma

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Produto por escalar

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Nem Sempre o Conjunto é um Espaço Vetorial

O conjunto das matrizes $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Nem Sempre o Conjunto é um Espaço Vetorial

O conjunto das matrizes $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Mas o conjunto das matrizes invertíveis

$$GL_n(\mathbb{R})$$

Nem Sempre o Conjunto é um Espaço Vetorial

O conjunto das matrizes $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Mas o conjunto das matrizes invertíveis

$$GL_n(\mathbb{R})$$

não é um espaço vetorial com as operações usuais

Nem Sempre o Conjunto é um Espaço Vetorial

O conjunto das matrizes $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Mas o conjunto das matrizes invertíveis

$$GL_n(\mathbb{R})$$

não é um espaço vetorial com as operações usuais

$$I \in GL_n(\mathbb{R})$$

Nem Sempre o Conjunto é um Espaço Vetorial

O conjunto das matrizes $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Mas o conjunto das matrizes invertíveis

$$GL_n(\mathbb{R})$$

não é um espaço vetorial com as operações usuais

$$I \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{mas} \quad 0I \notin GL_n(\mathbb{R})$$