Representação Matricial

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Representação Matricial

Transformações Lineares

Vetores como Matrizes Coluna

Podemos escrever um vetor de $\mathbb{R}^n$ como uma matriz coluna

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Operações

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

Operações

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \qquad \alpha v = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$$

Produto Escalar

O produto escalar entre v e w é

Produto Escalar

O produto escalar entre v e w é

$$v^t w$$

Produto Escalar

O produto escalar entre v e w é

$$v^t w = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Produto Escalar

O produto escalar entre v e w é

$$v^t w = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Conteúdo

Representação Matricial

Transformações Lineares

Transformação linear

Uma aplicação (função)

Transformação linear

Uma aplicação (função)

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Transformação linear

Uma aplicação (função)

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é linear quando

Transformação linear

Uma aplicação (função)

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é linear quando

$$T(v+w) = T(v) + T(w)$$

Transformação linear

Uma aplicação (função)

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é linear quando

$$T(v+w) = T(v) + T(w)$$

$$T(cv) = cT(v)$$

Combinações Lineares

As duas propriedades equivalem a

$$T\left(c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k\right) \;=\; c_1T(\vec{v}_1) + \cdots + c_kT(\vec{v}_k)$$

Exemplo 1

Avalie a transformação linear

$$T(x, y) = (2x - y, x + 3y)$$

em

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$T(2, 3)$

Exemplo 1 – Solução

$$T(2,3) = \left(\begin{array}{c} 2x - y \\ x + 3y \end{array} \right) \Bigg|_{x=2,\ y=3}$$

Exemplo 1 – Solução

$$T(2,3) = \left(\begin{array}{c} 2x - y \\ x + 3y \end{array} \right) \Bigg|_{x=2,\ y=3}$$

$$= \left(\begin{array}{c} 2 \times 2 - 3 \\ 2 + 3 \times 3 \end{array} \right)$$

Exemplo 1 – Solução

$$
\begin{aligned}
T(2,3) &= \left(\begin{array}{c} 2x - y \\ x + 3y \end{array} \right) \Bigg|_{x=2,\ y=3} \\
&= \left(\begin{array}{c} 2 \times 2 - 3 \\ 2 + 3 \times 3 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} 1 \\ 11 \end{array} \right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Sabendo que

$$T\left(\vec{i}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad T\left(\vec{j}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

calcule a transformação linear $T(\vec{v})$ para

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 3\vec{i} + 4\vec{j}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{v})$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$T(\vec{v}) = T\left(3\vec{i} + 4\vec{j}\right)$$

Exemplo 2 – Solução

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$T(\vec{v}) = T\left(3\vec{i} + 4\vec{j}\right)$$
$$= 3T\left(\vec{i}\right) + 4T\left(\vec{j}\right)$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 3\vec{i} + 4\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\vec{v}) &= T\left(3\vec{i} + 4\vec{j}\right) \\ &= 3T\left(\vec{i}\right) + 4T\left(\vec{j}\right) \\ &= 3\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 3\vec{i} + 4\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\vec{v}) &= T\left(3\vec{i} + 4\vec{j}\right) \\ &= 3T\left(\vec{i}\right) + 4T\left(\vec{j}\right) \\ &= 3\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 3\vec{i} + 4\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\vec{v}) &= T\left(3\vec{i} + 4\vec{j}\right) \\ &= 3T\left(\vec{i}\right) + 4T\left(\vec{j}\right) \\ &= 3\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 19 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 3

Verifique que a transformação $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$ é linear

Exemplo 3 – Solução

Temos que mostrar que para quais quer vetores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

e qualquer escalar c

$$T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$$

$$T(c\vec{v}) = cT(\vec{v})$$

Exemplo 3 – Soma

$T(\vec{v} + \vec{w})$

Exemplo 3 – Soma

$$T(\vec{v}+\vec{w}) = T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$$

Exemplo 3 – Soma

$$T(\vec{v}+\vec{w}) = T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} r+p \\ s+q \end{pmatrix}\right)$$

Exemplo 3 – Soma

$$T(\vec{v}+\vec{w}) = T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} r+p \\ s+q \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=r+p,\ y=s+q}$$

Exemplo 3 – Soma

$$
\begin{aligned}
T(\vec{v}+\vec{w}) = T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) &= T\left(\begin{pmatrix} r+p \\ s+q \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=r+p,\ y=s+q} \\
&= \begin{pmatrix} 2(r+p)-(s+q) \\ (r+p)+3(s+q) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Soma

$$
\begin{aligned}
T(\vec{v}+\vec{w}) = T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) &= T\left(\begin{pmatrix} r+p \\ s+q \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=r+p,\ y=s+q} \\
&= \begin{pmatrix} 2(r+p)-(s+q) \\ (r+p)+3(s+q) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2p-q+2r-s \\ p+3q+r+3s \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Soma

$$T(\vec{v}) + T(\vec{w})$$

Exemplo 3 – Soma

$$T(\vec{v}) + T(\vec{w}) = T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$$

Exemplo 3 – Soma

$$T(\vec{v}) + T(\vec{w}) = T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left.\begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\right|_{x=r,\ y=s}$$

Exemplo 3 – Soma

$$T(\vec{v}) + T(\vec{w}) = T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=r,\ y=s} + \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=p,\ y=q}$$

Exemplo 3 – Soma

$$
\begin{aligned}
T(\vec{v}) + T(\vec{w}) &= T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=r,\ y=s} + \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=p,\ y=q} \\
&= \begin{pmatrix} 2r - s \\ r + 3s \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Soma

$$
\begin{aligned}
T(\vec{v}) + T(\vec{w}) &= T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=r,\ y=s} + \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=p,\ y=q} \\
&= \begin{pmatrix} 2r - s \\ r + 3s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2p - q \\ p + 3q \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Soma

$$
\begin{aligned}
T(\vec{v}) + T(\vec{w}) &= T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=r,\ y=s} + \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=p,\ y=q} \\
&= \begin{pmatrix} 2r - s \\ r + 3s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2p - q \\ p + 3q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2p - q + 2r - s \\ p + 3q + r + 3s \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Soma

$$
\begin{aligned}
T(\vec{v}) + T(\vec{w}) &= T\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=r,\ y=s} + \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=p,\ y=q} \\
&= \begin{pmatrix} 2r - s \\ r + 3s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2p - q \\ p + 3q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2p - q + 2r - s \\ p + 3q + r + 3s \end{pmatrix} \\
&= T(\vec{v} + \vec{w})
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Produto por Escalar

$T(c\vec{v})$

Exemplo 3 – Produto por Escalar

$$T(c\vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} cr \\ cs \end{pmatrix}\right)$$

Exemplo 3 – Produto por Escalar

$$T(c\vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} cr \\ cs \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=cr,\ y=cs}$$

Exemplo 3 – Produto por Escalar

$$T(c\vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} cr \\ cs \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=cr,\ y=cs}$$

$$= \begin{pmatrix} 2cr - cs \\ cr + 3cs \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Produto por Escalar

$$T(c\vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} cr \\ cs \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=cr,\ y=cs}$$

$$= \begin{pmatrix} 2cr - cs \\ cr + 3cs \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c(2r - s) \\ c(r + 3s) \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Produto por Escalar

$$
\begin{aligned}
T(c\vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} cr \\ cs \end{pmatrix}\right) &= \left.\begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\right|_{x=cr,\ y=cs} \\
&= \begin{pmatrix} 2cr - cs \\ cr + 3cs \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c(2r - s) \\ c(r + 3s) \end{pmatrix} \\
&= c\begin{pmatrix} 2r - s \\ r + 3s \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Produto por Escalar

$$
\begin{aligned}
T(c\vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} cr \\ cs \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=cr,\ y=cs} \\
&= \begin{pmatrix} 2cr - cs \\ cr + 3cs \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c(2r - s) \\ c(r + 3s) \end{pmatrix} \\
&= c\begin{pmatrix} 2r - s \\ r + 3s \end{pmatrix} \;=\; cT(\vec{v})
\end{aligned}
$$

Transformações Lineares e Matrizes

Uma transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Transformações Lineares e Matrizes

Uma transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pode ser representada por uma matriz

Transformações Lineares e Matrizes

Uma transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pode ser representada por uma matriz

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Transformações Lineares e Matrizes

Uma transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pode ser representada por uma matriz

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

tal que

$$T(v) = Av$$

Exemplo 4

Determine a forma matricial $T(v) = Av$ da transformação linear

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Solução

Precisamos determinar uma matriz A

Exemplo 4 – Solução

Precisamos determinar uma matriz A tal que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Solução

Precisamos determinar uma matriz A tal que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Solução

Precisamos determinar uma matriz A tal que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$