Dependência e Independência Linear

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Dependência e Independência Linear

Matrizes e Sistema Lineares

Combinação Linear

Sejam

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$$

Combinação Linear

Sejam

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Combinação Linear

Sejam

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Uma combinação linear é

Combinação Linear

Sejam

$$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots,\ \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha_1, \alpha_2,\ \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Uma combinação linear é

$$\alpha_1\vec{v}_1 \ + \ \alpha_2\vec{v}_2 \ + \ \cdots \ + \ \alpha_k\vec{v}_k$$

Independência Linear

Os vetores

Independência Linear

Os vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$

Independência Linear

Os vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ são Linearmente Independentes (LI) se

Independência Linear

Os vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ são Linearmente Independentes (LI) se

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Independência Linear

Os vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ são Linearmente Independentes (LI) se

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

só é possível com

Independência Linear

Os vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ são Linearmente Independentes (LI) se

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

só é possível com

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$$

Independência Linear

Os vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ são Linearmente Independentes (LI) se

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

só é possível com

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$$

Não é possível escrever nenhum vetor como combinação dos demais

Dependência Linear

Os vetores

Dependência Linear

Os vetores

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$$

Dependência Linear

Os vetores

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$$

são Linearmente Dependentes (LD), se existem escalares

Dependência Linear

Os vetores

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$$

são Linearmente Dependentes (LD), se existem escalares

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$$

Dependência Linear

Os vetores

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$$

são Linearmente Dependentes (LD), se existem escalares

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$$

não todos nulos tais que

Dependência Linear

Os vetores

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$$

são Linearmente Dependentes (LD), se existem escalares

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$$

não todos nulos tais que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k$$

Dependência Linear

Os vetores

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$$

são Linearmente Dependentes (LD), se existem escalares

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$$

não todos nulos tais que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Dependência Linear

Assumindo que $\alpha_1 \neq 0$

Dependência Linear

Assumindo que $\alpha_1 \neq 0$

Podemos escrever $\vec{v}_1$ como combinação dos demais

Dependência Linear

Assumindo que $\alpha_1 \neq 0$

Podemos escrever $\vec{v}_1$ como combinação dos demais

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Dependência Linear

Assumindo que $\alpha_1 \neq 0$

Podemos escrever $\vec{v}_1$ como combinação dos demais

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

$$\alpha_1\vec{v}_1 = -\alpha_2\vec{v}_2 - \cdots - \alpha_k\vec{v}_k$$

Dependência Linear

Assumindo que $\alpha_1 \neq 0$

Podemos escrever $\vec{v}_1$ como combinação dos demais

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

$$\alpha_1\vec{v}_1 = -\alpha_2\vec{v}_2 - \cdots - \alpha_k\vec{v}_k$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\vec{v}_k$$

Exemplo 1

Determine se os vetores

$$\vec{v}_1 = (1, 2)$$

$$\vec{v}_2 = (2, 4)$$

são linearmente dependentes

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2\beta$$

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2\beta$$

Escolhendo $\beta = 1$

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2\beta$$

Escolhendo $\beta = 1$ temos $\alpha = -2$

Exemplo 1 – Solução

Verificando

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2\beta$$

Escolhendo $\beta = 1$ temos $\alpha = -2$

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2\beta$$

Escolhendo $\beta = 1$ temos $\alpha = -2$

Verificando

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$$

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2\beta$$

Escolhendo $\beta = 1$ temos $\alpha = -2$

Verificando

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2\beta$$

Escolhendo $\beta = 1$ temos $\alpha = -2$

Verificando

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2\beta$$

Escolhendo $\beta = 1$ temos $\alpha = -2$

Verificando

$$\begin{aligned} \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 &= -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2\beta$$

Escolhendo $\beta = 1$ temos $\alpha = -2$

Verificando

$$\begin{aligned} \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 &= -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Os vetores são linearmente dependentes

Exemplo 2

Determine se os vetores

$$\vec{v}_1 = (1, 2)$$

$$\vec{v}_2 = (2, 3)$$

são linearmente independentes

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Da segunda equação

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Da segunda equação

$$2\alpha + 3\beta = 0$$

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Da segunda equação

$$2\alpha + 3\beta = 0$$

$$2(-2\beta) + 3\beta = 0$$

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Da segunda equação

$$2\alpha + 3\beta = 0$$

$$2(-2\beta) + 3\beta = 0$$

$$-4\beta + 3\beta = 0$$

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Da segunda equação

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta &= 0 \\ 2(-2\beta) + 3\beta &= 0 \\ -4\beta + 3\beta &= 0 \\ -\beta &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Da segunda equação

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta &= 0 \\ 2(-2\beta) + 3\beta &= 0 \\ -4\beta + 3\beta &= 0 \\ -\beta &= 0 \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Da segunda equação

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta &= 0 \\ 2(-2\beta) + 3\beta &= 0 \\ -4\beta + 3\beta &= 0 \\ -\beta &= 0 \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

A única solução é $\alpha = \beta = 0$

Exemplo 2 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Da segunda equação

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta &= 0 \\ 2(-2\beta) + 3\beta &= 0 \\ -4\beta + 3\beta &= 0 \\ -\beta &= 0 \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

A única solução é $\alpha = \beta = 0$

Os vetores são linearmente independentes

Exemplo 3

Determine se

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$$

$$\vec{v}_2 = (2, 1, 1)$$

$$\vec{v}_3 = (0, 1, 3)$$

são linearmente independentes

Exemplo 3 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

Exemplo 3 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Exemplo 3 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Da segunda equação

Exemplo 3 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação

$$\alpha = -2\beta$$

Da segunda equação

$$\gamma = -\beta$$

Exemplo 3 – Solução

Substituindo na terceira

Exemplo 3 – Solução

Substituindo na terceira

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

Exemplo 3 – Solução

Substituindo na terceira

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

$$2(-2\beta) + \beta + 3(-\beta) = 0$$

Exemplo 3 – Solução

Substituindo na terceira

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

$$2(-2\beta) + \beta + 3(-\beta) = 0$$

$$-4\beta + \beta - 3\beta = 0$$

Exemplo 3 – Solução

Substituindo na terceira

$$
\begin{aligned}
2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\
2(-2\beta) + \beta + 3(-\beta) &= 0 \\
-4\beta + \beta - 3\beta &= 0 \\
-6\beta &= 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

Substituindo na terceira

$$
\begin{aligned}
2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\
2(-2\beta) + \beta + 3(-\beta) &= 0 \\
-4\beta + \beta - 3\beta &= 0 \\
-6\beta &= 0 \\
\beta &= 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

Substituindo na terceira

$$
\begin{aligned}
2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\
2(-2\beta) + \beta + 3(-\beta) &= 0 \\
-4\beta + \beta - 3\beta &= 0 \\
-6\beta &= 0 \\
\beta &= 0
\end{aligned}
$$

$$\alpha = -2\beta = 0$$

Exemplo 3 – Solução

Substituindo na terceira

$$
\begin{aligned}
2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\
2(-2\beta) + \beta + 3(-\beta) &= 0 \\
-4\beta + \beta - 3\beta &= 0 \\
-6\beta &= 0 \\
\beta &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -2\beta = 0 \\
\gamma &= -\beta = 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

Substituindo na terceira

$$
\begin{aligned}
2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\
2(-2\beta) + \beta + 3(-\beta) &= 0 \\
-4\beta + \beta - 3\beta &= 0 \\
-6\beta &= 0 \\
\beta &= 0
\end{aligned}
$$

$$\alpha = -2\beta = 0$$

$$\gamma = -\beta = 0$$

Portanto $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Exemplo 3 – Solução

Substituindo na terceira

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$
$$2(-2\beta) + \beta + 3(-\beta) = 0$$
$$-4\beta + \beta - 3\beta = 0$$
$$-6\beta = 0$$
$$\beta = 0$$

$$\alpha = -2\beta = 0$$

$$\gamma = -\beta = 0$$

Portanto $\alpha = \beta = \gamma = 0$
e os vetores são linearente independentes

Exemplo 4

Determine se

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$$

$$\vec{v}_2 = (2, 1, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (3, 3, 1)$$

são linearmente independentes

Exemplo 4 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

Exemplo 4 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Exemplo 4 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Da terceira equação

$$\alpha = -\gamma$$

Exemplo 4 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Da terceira equação

$$\alpha = -\gamma$$

Substituindo na primeira

Exemplo 4 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Da terceira equação

$$\alpha = -\gamma$$

Substituindo na primeira

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$$

Exemplo 4 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Da terceira equação

$$\alpha = -\gamma$$

Substituindo na primeira

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$$

$$-\gamma + 2\beta + 3\gamma = 0$$

Exemplo 4 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Da terceira equação

$$\alpha = -\gamma$$

Substituindo na primeira

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$$

$$-\gamma + 2\beta + 3\gamma = 0$$

$$2\beta + 2\gamma = 0$$

Exemplo 4 – Solução

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Da terceira equação

$$\alpha = -\gamma$$

Substituindo na primeira

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ -\gamma + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\beta + 2\gamma &= 0 \\ \beta &= -\gamma \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$

$$0 = 0$$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$
$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$
$$0 = 0$$

Logo γ é livre

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$
$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$
$$0 = 0$$

Logo γ é livre
Tomando $\gamma = 1$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$
$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$
$$0 = 0$$

Logo γ é livre
Tomando $\gamma = 1$ obtemos

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$
$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$
$$0 = 0$$

Logo γ é livre
Tomando $\gamma = 1$ obtemos

$$\alpha = -\gamma = -1$$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$
$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$
$$0 = 0$$

Logo γ é livre
Tomando $\gamma = 1$ obtemos

$$\alpha = -\gamma = -1 \qquad \beta = -\gamma = -1$$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$

$$0 = 0$$

Temos a relação

Logo γ é livre
Tomando $\gamma = 1$ obtemos

$$\alpha = -\gamma = -1 \qquad \beta = -\gamma = -1$$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$
$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$
$$0 = 0$$

Temos a relação

$$-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

Logo γ é livre
Tomando $\gamma = 1$ obtemos

$$\alpha = -\gamma = -1 \qquad \beta = -\gamma = -1$$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$

$$0 = 0$$

Logo γ é livre
Tomando $\gamma = 1$ obtemos

$$\alpha = -\gamma = -1 \qquad \beta = -\gamma = -1$$

Temos a relação

$$-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na segunda

$$2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

$$2(-\gamma) + (-\gamma) + 3\gamma = 0$$

$$0 = 0$$

Logo γ é livre
Tomando $\gamma = 1$ obtemos

$$\alpha = -\gamma = -1 \qquad \beta = -\gamma = -1$$

Temos a relação

$$-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Portanto os vetores são linearmente dependentes

Conteúdo

Dependência e Independência Linear

Matrizes e Sistema Lineares

Sistema Homogêneo

Colocando os vetores como colunas de uma matriz

Sistema Homogêneo

Colocando os vetores como colunas de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix}$$

Sistema Homogêneo

Colocando os vetores como colunas de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix}$$

A condição

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Sistema Homogêneo

Colocando os vetores como colunas de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix}$$

A condição

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Corresponde à

Sistema Homogêneo

Colocando os vetores como colunas de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix}$$

A condição

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Corresponde à

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

Sistema Homogêneo

Colocando os vetores como colunas de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix}$$

A condição

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Corresponde à

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = A\vec{x}$$

Sistema Homogêneo

Colocando os vetores como colunas de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix}$$

A condição

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Corresponde à

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = A\vec{x} = \vec{0}$$

Critério para Independência Linear

Os vetores são linearmente independentes

Critério para Independência Linear

Os vetores são linearmente independentes se o sistema

Critério para Independência Linear

Os vetores são linearmente independentes se o sistema

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

Critério para Independência Linear

Os vetores são linearmente independentes se o sistema

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

possui somente a solução trivial

Critério para Independência Linear

Os vetores são linearmente independentes se o sistema

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

possui somente a solução trivial $\vec{x} = \vec{0}$

Determinante

Dados n vetores

Determinante

Dados n vetores

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$$

Determinante

Dados n vetores

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$$

formamos a matriz quadrada

Determinante

Dados n vetores

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$$

formamos a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

Determinante

Dados n vetores

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$$

formamos a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

Se

$$\det(A) \neq 0$$

Determinante

Dados n vetores

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$$

formamos a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

Se

$$\det(A) \neq 0$$

os vetores são linearmente independentes

Vetor nulo

Qualquer conjunto que contenha

$\vec{0}$

Vetor nulo

Qualquer conjunto que contenha

$$\vec{0}$$

é linearmente dependente

Múltiplos

Se

$$\vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1$$

Múltiplos

Se

$$\vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1$$

para algum

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

Múltiplos

Se

$$\vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1$$

para algum

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

então

$$\vec{v}_1 \quad \text{e} \quad \vec{v}_2$$

Múltiplos

Se

$$\vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1$$

para algum

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

então

$$\vec{v}_1 \quad \text{e} \quad \vec{v}_2$$

são linearmente dependentes

Exemplo 5

Determine se

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$$

$$\vec{v}_3 = (2, 0, 1)$$

são linearmente independentes

Exemplo 5 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A)$

Exemplo 5 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4$$

Exemplo 5 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$$

Exemplo 5 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$$

Como $\det(A) = 5 \neq 0$

Exemplo 5 – Solução

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$$

Como $\det(A) = 5 \neq 0$ os vetores são linearmente independentes