Subespaços Vetoriais

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Definição

Subespaços de $\mathbb{R}^n$

Subespaços Gerados

Solução de Sistemas Lineares

Subespaço

Dado um espaço vetorial V

Subespaço

Dado um espaço vetorial V

Um subconjunto $W \subseteq V$

Subespaço

Dado um espaço vetorial V

Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço de V

Subespaço

Dado um espaço vetorial V

Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço de V

quando W também é um espaço vetorial com as operações de V

Critério de Subespaço

Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço se

Critério de Subespaço

Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço se

$\vec{0} \in W$

Critério de Subespaço

Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço se

$\vec{0} \in W$

$\vec{u}, \vec{v} \in W$

Critério de Subespaço

Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço se

$$\vec{0} \in W$$

$$\vec{u}, \vec{v} \in W \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in W$$

Critério de Subespaço

Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço se

$\vec{0} \in W$

$\vec{u}, \vec{v} \in W \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in W$

$\vec{u} \in W$

Critério de Subespaço

Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço se

$\vec{0} \in W$

$\vec{u}, \vec{v} \in W \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in W$

$\vec{u} \in W \quad a \in \mathbb{R}$

Critério de Subespaço

Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço se

$$\vec{0} \in W$$

$$\vec{u}, \vec{v} \in W \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in W$$

$$\vec{u} \in W \quad a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a\vec{u} \in W$$

Critério Alternativo

Basta verificar

Critério Alternativo

Basta verificar

$$\vec{0} \in W$$

Critério Alternativo

Basta verificar

$$\vec{0} \in W$$

$$a\vec{u} + b\vec{v} \in W$$

Critério Alternativo

Basta verificar

$\vec{0} \in W$

$a\vec{u} + b\vec{v} \in W$ para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in W \quad a, b \in \mathbb{R}$

Subespaços Triviais

Todo espaço vetorial possui dois subespaços

Subespaços Triviais

Todo espaço vetorial possui dois subespaços

$$W_1 = \{\vec{0}\}$$

Subespaços Triviais

Todo espaço vetorial possui dois subespaços

$$W_1 = \{\vec{0}\}$$

e

$$W_2 = V$$

Conteúdo

Definição

Subespaços de $\mathbb{R}^n$

Subespaços Gerados

Solução de Sistemas Lineares

Subespaços de $\mathbb{R}^2$

Os subespaços de $\mathbb{R}^2$ podem ser

Subespaços de $\mathbb{R}^2$

Os subespaços de $\mathbb{R}^2$ podem ser

$$W_1 = \{\vec{0}\}$$

Subespaços de $\mathbb{R}^2$

Os subespaços de $\mathbb{R}^2$ podem ser

$W_1 = \{\vec{0}\}$

$W_2 =$ uma reta que passa pela origem

Subespaços de $\mathbb{R}^2$

Os subespaços de $\mathbb{R}^2$ podem ser

$W_1 = \{\vec{0}\}$

$W_2 =$ uma reta que passa pela origem

$W_3 = \mathbb{R}^2$

Subespaços de $\mathbb{R}^3$

Os subespaços de $\mathbb{R}^3$ podem ser

Subespaços de $\mathbb{R}^3$

Os subespaços de $\mathbb{R}^3$ podem ser

$$W_1 = \{\vec{0}\}$$

Subespaços de $\mathbb{R}^3$

Os subespaços de $\mathbb{R}^3$ podem ser

$W_1 = \{\vec{0}\}$

$W_2 =$ uma reta que passa pela origem

Subespaços de $\mathbb{R}^3$

Os subespaços de $\mathbb{R}^3$ podem ser

$W_1 = \{\vec{0}\}$

$W_2 =$ uma reta que passa pela origem

$W_3 =$ um plano que passa pela origem

Subespaços de $\mathbb{R}^3$

Os subespaços de $\mathbb{R}^3$ podem ser

$W_1 = \{\vec{0}\}$

$W_2 =$ uma reta que passa pela origem

$W_3 =$ um plano que passa pela origem

$W_4 = \mathbb{R}^3$

Conteúdo

Definição

Subespaços de $\mathbb{R}^n$

Subespaços Gerados

Solução de Sistemas Lineares

Subespaço Gerado

Dado um conjunto de vetores de um espaço vetorial V

$$G = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

Subespaço Gerado

Dado um conjunto de vetores de um espaço vetorial V

$$G = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

O conunto dos vetores gerados por G

Subespaço Gerado

Dado um conjunto de vetores de um espaço vetorial V

$$G = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

O conunto dos vetores gerados por G

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\,\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

Subespaço Gerado

Dado um conjunto de vetores de um espaço vetorial V

$$G = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

O conunto dos vetores gerados por G

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\,\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

é um subespaço de V

O Subespaço Gerado Contém o Vetor Nulo

Seja

$$W = \text{ger}(G)$$

O Subespaço Gerado Contém o Vetor Nulo

Seja

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\,\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

O Subespaço Gerado Contém o Vetor Nulo

Seja

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\right\} \subset V$$

O Subespaço Gerado Contém o Vetor Nulo

Seja

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\right\} \subset V$$

O vetor nulo pertence a W

$$\vec{0} \in W$$

O Subespaço Gerado Contém o Vetor Nulo

Seja

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\right\} \subset V$$

O vetor nulo pertence a W

$$\vec{0} \in W$$

pois

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + \cdots + 0\vec{v}_k$$

O Subespaço Gerado é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\,\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

O Subespaço Gerado é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\,\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

O Subespaço Gerado é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\,\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

O Subespaço Gerado é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\,\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

$$\vec{r} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k$$

O Subespaço Gerado é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \text{ger}(G) = \text{ger}\,\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

$$\vec{r} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k$$

$$\vec{s} = d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_k\vec{v}_k$$

O Subespaço Gerado é Fechado

$a\vec{r} + b\vec{s}$

O Subespaço Gerado é Fechado

$$a\vec{r} + b\vec{s} = a\left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k\right)$$

O Subespaço Gerado é Fechado

$$a\vec{r} + b\vec{s} = a\left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k\right) + b\left(d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_k\vec{v}_k\right)$$

O Subespaço Gerado é Fechado

$$
\begin{aligned}
a\vec{r} + b\vec{s} &= a\left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k\right) + b\left(d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_k\vec{v}_k\right) \\
&= ac_1\vec{v}_1 + ac_2\vec{v}_2 + \cdots + ac_k\vec{v}_k
\end{aligned}
$$

O Subespaço Gerado é Fechado

$$
\begin{aligned}
a\vec{r} + b\vec{s} &= a\left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k\right) + b\left(d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_k\vec{v}_k\right) \\
&= ac_1\vec{v}_1 + ac_2\vec{v}_2 + \cdots + ac_k\vec{v}_k + bd_1\vec{v}_1 + bd_2\vec{v}_2 + \cdots + bd_k\vec{v}_k
\end{aligned}
$$

O Subespaço Gerado é Fechado

$$
\begin{aligned}
a\vec{r} + b\vec{s} &= a\left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k\right) + b\left(d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_k\vec{v}_k\right) \\
&= ac_1\vec{v}_1 + ac_2\vec{v}_2 + \cdots + ac_k\vec{v}_k + bd_1\vec{v}_1 + bd_2\vec{v}_2 + \cdots + bd_k\vec{v}_k \\
&= (ac_1 + bd_1)\vec{v}_1 + (ac_2 + bd_2)\vec{v}_2 + \cdots + (ac_k + bd_k)\vec{v}_k
\end{aligned}
$$

O Subespaço Gerado é Fechado

$$
\begin{aligned}
a\vec{r} + b\vec{s} &= a\left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k\right) + b\left(d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_k\vec{v}_k\right) \\
&= ac_1\vec{v}_1 + ac_2\vec{v}_2 + \cdots + ac_k\vec{v}_k + bd_1\vec{v}_1 + bd_2\vec{v}_2 + \cdots + bd_k\vec{v}_k \\
&= (ac_1 + bd_1)\vec{v}_1 + (ac_2 + bd_2)\vec{v}_2 + \cdots + (ac_k + bd_k)\vec{v}_k \\
&= p_1\vec{v}_1 + p_2\vec{v}_2 + \cdots + p_k\vec{v}_k
\end{aligned}
$$

O Subespaço Gerado é Fechado

$$\begin{aligned} a\vec{r} + b\vec{s} &= a\left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k\right) + b\left(d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_k\vec{v}_k\right) \\ &= ac_1\vec{v}_1 + ac_2\vec{v}_2 + \cdots + ac_k\vec{v}_k + bd_1\vec{v}_1 + bd_2\vec{v}_2 + \cdots + bd_k\vec{v}_k \\ &= (ac_1 + bd_1)\vec{v}_1 + (ac_2 + bd_2)\vec{v}_2 + \cdots + (ac_k + bd_k)\vec{v}_k \\ &= p_1\vec{v}_1 + p_2\vec{v}_2 + \cdots + p_k\vec{v}_k \end{aligned}$$

Então $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Conteúdo

Definição

Subespaços de $\mathbb{R}^n$

Subespaços Gerados

Solução de Sistemas Lineares

Espaço Solução

Considere um sistema homogêneo

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

Espaço Solução

Considere um sistema homogêneo

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

O conjunto solução é

Espaço Solução

Considere um sistema homogêneo

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

O conjunto solução é

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

Espaço Solução

Considere um sistema homogêneo

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

O conjunto solução é

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

Esse conjunto é sempre um subespaço de $\mathbb{R}^n$

O Conjunto Solução Contém o Vetor Nulo

Seja

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

O Conjunto Solução Contém o Vetor Nulo

Seja

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

O vetor nulo pertence a W

$$\vec{0} \in W$$

O Conjunto Solução Contém o Vetor Nulo

Seja

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

O vetor nulo pertence a W

$$\vec{0} \in W$$

pois

$$A\vec{0} = \vec{0}$$

O Conjunto Solução é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

O Conjunto Solução é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

O Conjunto Solução é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

O Conjunto Solução é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

$$A\vec{r} = \vec{0}$$

O Conjunto Solução é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

$$A\vec{r} = \vec{0} \qquad\qquad A\vec{s} = \vec{0}$$

O Conjunto Solução é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

$$A\vec{r} = \vec{0} \qquad\qquad A\vec{s} = \vec{0}$$

Portanto

O Conjunto Solução é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

$$A\vec{r} = \vec{0} \qquad\qquad A\vec{s} = \vec{0}$$

Portanto

$$A\left(a\vec{r} + b\vec{s}\right)$$

O Conjunto Solução é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

$$A\vec{r} = \vec{0} \qquad\qquad A\vec{s} = \vec{0}$$

Portanto

$$A\left(a\vec{r} + b\vec{s}\right) = aA\vec{r} + bA\vec{s}$$

O Conjunto Solução é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

$$A\vec{r} = \vec{0} \qquad\qquad A\vec{s} = \vec{0}$$

Portanto

$$A\left(a\vec{r} + b\vec{s}\right) = aA\vec{r} + bA\vec{s} = a\vec{0} + b\vec{0}$$

O Conjunto Solução é Fechado

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores em

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

precisamos mostrar que $a\vec{r} + b\vec{s} \in W$

Sabemos que

$$A\vec{r} = \vec{0} \qquad\qquad A\vec{s} = \vec{0}$$

Portanto

$$A\left(a\vec{r} + b\vec{s}\right) = aA\vec{r} + bA\vec{s} = a\vec{0} + b\vec{0} = \vec{0}$$

Exemplo 1

Determine se

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle/\; y = 2x \right\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^2$

Exemplo 1 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Exemplo 1 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

Exemplo 1 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

y

Exemplo 1 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

$$y = 2x$$

Exemplo 1 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

$$y = 2x = 2 \times 0$$

Exemplo 1 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

$$y = 2x = 2 \times 0 = 0$$

Exemplo 1 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

$$y = 2x = 2 \times 0 = 0$$

Portanto

$$\vec{0} \in W$$

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W$

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \in W$

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \in W$ então $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix}$

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \in W$ então $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix}$

$$a\vec{v} + b\vec{w}$$

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \in W$ então $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix}$

$$a\vec{v} + b\vec{w} = a\begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \in W$ então $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix}$

$$a\vec{v} + b\vec{w} = a\begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq \\ 2(ap + bq) \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \in W$ então $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix}$

$$a\vec{v} + b\vec{w} = a\begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq \\ 2(ap + bq) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \in W$ então $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix}$

$$a\vec{v} + b\vec{w} = a\begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq \\ 2(ap + bq) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$$

Logo $a\vec{u} + b\vec{v} \in W$

Exemplo 1 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \in W$ então $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix}$

$$a\vec{v} + b\vec{w} = a\begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} q \\ 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq \\ 2(ap + bq) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$$

Logo $a\vec{u} + b\vec{v} \in W$

Portanto, W é subespaço de $\mathbb{R}^2$

Exemplo 2

Determine se

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle/\; y = 2x + 1 \right\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^2$

Exemplo 2 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Exemplo 2 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

Exemplo 2 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

y

Exemplo 2 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

$$y = 3x + 1$$

Exemplo 2 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

$$y = 3x + 1 = 3 \times 0 + 1$$

Exemplo 2 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

$$y = 3x + 1 = 3 \times 0 + 1 = 1$$

Exemplo 2 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

$$y = 3x + 1 = 3 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$$

Exemplo 2 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

$$y = 3x + 1 = 3 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$$

Logo $\vec{0} \notin W$

Exemplo 2 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Se $x = 0$ então

$$y = 3x + 1 = 3 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$$

Logo $\vec{0} \notin W$

Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^2$

Exemplo 3

Determine se

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle/\; x + y - z = 0 \right\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^3$

Exemplo 3 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Exemplo 3 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

$$x + y - z$$

Exemplo 3 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

$$x + y - z = 0 + 0 - 0$$

Exemplo 3 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

$$x + y - z = 0 + 0 - 0 = 0$$

Exemplo 3 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

$$x + y - z = 0 + 0 - 0 = 0$$

Portanto

$$\vec{0} \in W$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

Exemplo 3 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W$

Exemplo 3 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in W$

Exemplo 3 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in W$

$$\vec{p} = a\vec{v} + b\vec{w}$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in W$

$$\vec{p} = a\vec{v} + b\vec{w} = a \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

A combinação linear de dois vetores em W pertence a W?

$$\vec{v},\ \vec{w}\ \in W \quad \Rightarrow \quad a\vec{v} + b\vec{w}\ \in W$$

Se $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in W$

$$\vec{p} = a\vec{v} + b\vec{w} = a \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bw_1 \\ av_2 + bw_2 \\ av_3 + bw_3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Como $\vec{v}, \vec{w} \in W$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Como $\vec{v}, \vec{w} \in W$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Como $\vec{v}, \vec{w} \in W$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 \qquad w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Como $\vec{v}, \vec{w} \in W$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 \qquad w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

Verificando se $\vec{p} \in W$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Como $\vec{v}, \vec{w} \in W$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 \qquad w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

Verificando se $\vec{p} \in W$

$$x + y - z$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Como $\vec{v}, \vec{w} \in W$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 \qquad w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

Verificando se $\vec{p} \in W$

$$x + y - z = p_1 + p_2 - p_3$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Como $\vec{v}, \vec{w} \in W$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 \qquad w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

Verificando se $\vec{p} \in W$

$$\begin{aligned} x + y - z &= p_1 + p_2 - p_3 \\ &= (av_1 + bw_1) + (av_2 + bw_2) - (av_3 + bw_3) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Como $\vec{v}, \vec{w} \in W$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 \qquad w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

Verificando se $\vec{p} \in W$

$$\begin{aligned} x + y - z &= p_1 + p_2 - p_3 \\ &= (av_1 + bw_1) + (av_2 + bw_2) - (av_3 + bw_3) \\ &= a(v_1 + v_2 - v_3) + b(w_1 + w_2 - w_3) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Como $\vec{v}, \vec{w} \in W$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 \qquad w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

Verificando se $\vec{p} \in W$

$$\begin{aligned} x + y - z &= p_1 + p_2 - p_3 \\ &= (av_1 + bw_1) + (av_2 + bw_2) - (av_3 + bw_3) \\ &= a(v_1 + v_2 - v_3) + b(w_1 + w_2 - w_3) \\ &= a \times 0 + b \times 0 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Como $\vec{v}, \vec{w} \in W$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 \qquad w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

Verificando se $\vec{p} \in W$

$$\begin{aligned} x + y - z &= p_1 + p_2 - p_3 \\ &= (av_1 + bw_1) + (av_2 + bw_2) - (av_3 + bw_3) \\ &= a(v_1 + v_2 - v_3) + b(w_1 + w_2 - w_3) \\ &= a \times 0 + b \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Logo $\vec{p} \in W$

Exemplo 3 – Combinação Linear

Logo $\vec{p} \in W$

Portanto W é subespaço de $\mathbb{R}^3$

Exemplo 4

Determine se

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle/\; x + y - z = 2 \right\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^3$

Exemplo 4 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

Exemplo 4 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

$$x + y - z$$

Exemplo 4 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

$$x + y - z = 0 + 0 - 0$$

Exemplo 4 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

$$x + y - z = 0 + 0 - 0 = 0$$

Exemplo 4 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

$$x + y - z = 0 + 0 - 0 = 0 \neq 2$$

Exemplo 4 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

$$x + y - z = 0 + 0 - 0 = 0 \neq 2$$

Portanto

$$\vec{0} \notin W$$

Exemplo 4 – Vetor Nulo

O vetor nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

$$x + y - z = 0 + 0 - 0 = 0 \neq 2$$

Portanto

$$\vec{0} \notin W$$

Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^2$

Exemplo 5

Determine o espaço solução de

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$(x + y + z) - (x - y + z) = 0$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$(x + y + z) - (x - y + z) = 0$$

$$2y = 0$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$(x + y + z) - (x - y + z) = 0$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$(x + y + z) - (x - y + z) = 0$$
$$2y = 0$$
$$y = 0$$

Substituindo

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$(x + y + z) - (x - y + z) = 0$$
$$2y = 0$$
$$y = 0$$

Substituindo

$$x + y + z = 0$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$\begin{aligned}(x+y+z)-(x-y+z) &= 0\\ 2y &= 0\\ y &= 0\end{aligned}$$

Substituindo

$$\begin{aligned}x+y+z &= 0\\ x+z &= 0\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$\begin{aligned}(x+y+z)-(x-y+z) &= 0\\ 2y &= 0\\ y &= 0\end{aligned}$$

Substituindo

$$\begin{aligned}x+y+z &= 0\\ x+z &= 0\\ x &= -z\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$(x + y + z) - (x - y + z) = 0$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

Tomando $z = t$

Substituindo

$$x + y + z = 0$$

$$x + z = 0$$

$$x = -z$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$(x+y+z)-(x-y+z)=0$$

$$2y=0$$

$$y=0$$

Tomando $z=t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Substituindo

$$x+y+z=0$$

$$x+z=0$$

$$x=-z$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$(x+y+z)-(x-y+z)=0$$

$$2y=0$$

$$y=0$$

Substituindo

$$x+y+z=0$$

$$x+z=0$$

$$x=-z$$

Tomando $z=t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$(x+y+z)-(x-y+z)=0$$

$$2y=0$$

$$y=0$$

Substituindo

$$x+y+z=0$$

$$x+z=0$$

$$x=-z$$

Tomando $z=t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução

Subtraindo as equações

$$(x+y+z)-(x-y+z)=0$$

$$2y=0$$

$$y=0$$

Substituindo

$$x+y+z=0$$

$$x+z=0$$

$$x=-z$$

Tomando $z=t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo

$$W = \operatorname{ger}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 6

Determine se o conjunto das matrizes simétricas de ordem 2

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Big/ \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

é um subespaço de $M_{2\times 2}$

Exemplo 6 – Matriz Nula

Escolhendo a, b e c iguais a zero

Exemplo 6 – Matriz Nula

Escolhendo a, b e c iguais a zero

verificamos que a matriz nula pertence a W

Exemplo 6 – Matriz Nula

Escolhendo a, b e c iguais a zero

verificamos que a matriz nula pertence a W

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Exemplo 6 – Combinação Linear

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Combinação Linear

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Combinação Linear

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exemplo 6 – Combinação Linear

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\lambda A + \mu B$$

Exemplo 6 – Combinação Linear

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\lambda A + \mu B = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Combinação Linear

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\lambda A + \mu B = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu d & \lambda b + \mu e \\ \lambda b + \mu e & \lambda c + \mu f \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 – Combinação Linear

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\lambda A + \mu B = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu d & \lambda b + \mu e \\ \lambda b + \mu e & \lambda c + \mu f \end{pmatrix}$$

A matriz resultante é simétrica

Exemplo 6 – Combinação Linear

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\lambda A + \mu B = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu d & \lambda b + \mu e \\ \lambda b + \mu e & \lambda c + \mu f \end{pmatrix}$$

A matriz resultante é simétrica

Logo W é subespaço