Bases Ortogonias e Ortonormais

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear



https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Bases e Coordenadas

Bases Ortogonais

Bases Ortonormais

Exemplos

Base

Uma base de um espaço vetorial V

Base

Uma base de um espaço vetorial V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Base

Uma base de um espaço vetorial V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é um conjunto de vetores que

Base

Uma base de um espaço vetorial V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é um conjunto de vetores que

- gera o espaço

Base

Uma base de um espaço vetorial V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é um conjunto de vetores que

- gera o espaço

$$V = \text{ger}\,(\mathcal{B})$$

Base

Uma base de um espaço vetorial V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é um conjunto de vetores que

- gera o espaço

  $$V = \text{ger}\,(\mathcal{B})$$

- é linearmente independente

Base

Uma base de um espaço vetorial V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é um conjunto de vetores que

- gera o espaço

$$V = \text{ger}\,(\mathcal{B})$$

- é linearmente independente

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

Base

Uma base de um espaço vetorial V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é um conjunto de vetores que

- gera o espaço

  $$V = \text{ger}\,(\mathcal{B})$$

- é linearmente independente

  $$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_i = 0$$

Coordenadas em uma Base

Considerando uma base ordenada de V

Coordenadas em uma Base

Considerando uma base ordenada de V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Coordenadas em uma Base

Considerando uma base ordenada de V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Existe uma única representação para cada vetor $\vec{v} \in V$

Coordenadas em uma Base

Considerando uma base ordenada de V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Existe uma única representação para cada vetor $\vec{v} \in V$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Coordenadas em uma Base

Considerando uma base ordenada de V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Existe uma única representação para cada vetor $\vec{v} \in V$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Coordenadas em uma Base

Considerando uma base ordenada de V

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Existe uma única representação para cada vetor $\vec{v} \in V$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

tal que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_n\vec{v}_n$

Conteúdo

Bases e Coordenadas

Bases Ortogonais

Bases Ortonormais

Exemplos

Independência de Vetores Ortogonais

Vetores ortogonais $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$

Independência de Vetores Ortogonais

Vetores ortogonais $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes

Independência de Vetores Ortogonais

Vetores ortogonais $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes

$$\vec{0} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

Independência de Vetores Ortogonais

Vetores ortogonais $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes

$$\vec{0} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$\vec{0} \cdot \vec{v}_i = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_i$$

Independência de Vetores Ortogonais

Vetores ortogonais $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes

$$\vec{0} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$\vec{0} \cdot \vec{v}_i = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_i$$

$$0 = c_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_i + \cdots + c_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + \cdots + c_n\vec{v}_n \cdot \vec{v}_i$$

Independência de Vetores Ortogonais

Vetores ortogonais $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes

$$\vec{0} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$\vec{0} \cdot \vec{v}_i = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_i$$

$$0 = c_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_i + \cdots + c_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + \cdots + c_n\vec{v}_n \cdot \vec{v}_i$$

$$0 = 0 + \cdots + c_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + \cdots + 0$$

Independência de Vetores Ortogonais

Vetores ortogonais $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes

$$\vec{0} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$\vec{0} \cdot \vec{v}_i = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_i$$

$$0 = c_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_i + \cdots + c_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + \cdots + c_n\vec{v}_n \cdot \vec{v}_i$$

$$0 = 0 + \cdots + c_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + \cdots + 0$$

$$0 = c_i\|\vec{v}_i\|^2$$

Independência de Vetores Ortogonais

Vetores ortogonais $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes

$$\vec{0} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$\vec{0} \cdot \vec{v}_i = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_i$$

$$0 = c_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_i + \cdots + c_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + \cdots + c_n\vec{v}_n \cdot \vec{v}_i$$

$$0 = 0 + \cdots + c_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + \cdots + 0$$

$$0 = c_i\|\vec{v}_i\|^2$$

$$c_i = 0$$

Base Ortogonal

Uma base

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Base Ortogonal

Uma base

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é ortogonal quando

Base Ortogonal

Uma base

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é ortogonal quando

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \qquad i \neq j$$

Coordenadas em uma Base Ortogonal

Se $\mathcal{B}$ é ortogonal

Coordenadas em uma Base Ortogonal

Se $\mathcal{B}$ é ortogonal

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

Coordenadas em uma Base Ortogonal

Se $\mathcal{B}$ é ortogonal

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_j$$

Coordenadas em uma Base Ortogonal

Se $\mathcal{B}$ é ortogonal

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_j$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = c_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_j + \cdots + c_j\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j + \cdots + c_n\vec{v}_n \cdot \vec{v}_j$$

Coordenadas em uma Base Ortogonal

Se $\mathcal{B}$ é ortogonal

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_j$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = c_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_j + \cdots + c_j\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j + \cdots + c_n\vec{v}_n \cdot \vec{v}_j$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0 + \cdots + c_j\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j + \cdots + 0$$

Coordenadas em uma Base Ortogonal

Se $\mathcal{B}$ é ortogonal

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_j$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = c_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_j + \cdots + c_j\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j + \cdots + c_n\vec{v}_n \cdot \vec{v}_j$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0 + \cdots + c_j\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j + \cdots + 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = c_j\|\vec{v}_j\|^2$$

Coordenadas em uma Base Ortogonal

Se $\mathcal{B}$ é ortogonal

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = (c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_j$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = c_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_j + \cdots + c_j\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j + \cdots + c_n\vec{v}_n \cdot \vec{v}_j$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0 + \cdots + c_j\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j + \cdots + 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{v}_j = c_j\|\vec{v}_j\|^2$$

$$c_j = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_j}{\|\vec{v}_j\|^2}$$

Coordenadas em uma Base Ortogonal

Em qualquer base ortogonal

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_j}{\|\vec{v}_j\|^2} \vec{v}_j$$

Conteúdo

Bases e Coordenadas

Bases Ortogonais

Bases Ortonormais

Exemplos

Base Ortonormal

Uma base

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Base Ortonormal

Uma base

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é ortonormal quando

Base Ortonormal

Uma base

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é ortonormal quando

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \qquad i \neq j$$

Base Ortonormal

Uma base

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

é ortonormal quando

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \qquad i \neq j$$

$$\|\vec{v}_i\| = 1$$

Base Ortonormal Definição Equivalente

$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$

Base Ortonormal Definição Equivalente

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij}$$

Base Ortonormal Definição Equivalente

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Coordenadas em uma Base Ortonormal

Se $\mathcal{B}$ é ortonormal

Coordenadas em uma Base Ortonormal

Se $\mathcal{B}$ é ortonormal

$$\|\vec{v}_j\|^2 = 1$$

Coordenadas em uma Base Ortonormal

Se $\mathcal{B}$ é ortonormal

$$\|\vec{v}_j\|^2 = 1$$

$$c_j = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_j}{\|\vec{v}_j\|^2}$$

Coordenadas em uma Base Ortonormal

Se $\mathcal{B}$ é ortonormal

$$\|\vec{v}_j\|^2 = 1$$

$$c_j = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_j}{\|\vec{v}_j\|^2} = \vec{x} \cdot \vec{v}_j$$

Coordenadas em uma Base Ortonormal

Se $\mathcal{B}$ é ortonormal

$$\|\vec{v}_j\|^2 = 1$$

$$c_j = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_j}{\|\vec{v}_j\|^2} = \vec{x} \cdot \vec{v}_j$$

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{x} \cdot \vec{v}_j\right) \ \vec{v}_j$$

Conteúdo

Bases e Coordenadas

Bases Ortogonais

Bases Ortonormais

Exemplos

Exemplo 1

Determine se

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base ortogonal ou ortonormal de $\mathbb{R}^3$

Exemplo 1 – Solução

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 2$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + (-1)0 + 0 \times 2$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + (-1)0 + 0 \times 2 = 0$$

Exemplo 1 – Solução

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + (-1)0 + 0 \times 2 = 0$$

Logo $\mathcal{B}$ é ortogonal

Exemplo 1 – Solução

$\|\vec{v}_1\|$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\|$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_3\|$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_3\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_3\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_3\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2} = 2$$

Exemplo 1 – Solução

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_3\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2} = 2$$

Logo $\mathcal{B}$ não é ortonormal

Exemplo 2

Considere a base ortogonal

$$B = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,2)\}$$

Determine as coordenadas de

$$\vec{x} = (3,-1,4)$$

na base B

Exemplo 2 – Solução

Se $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

Exemplo 2 – Solução

Se $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$c_1 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}$$

Exemplo 2 – Solução

Se $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$c_1 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}$$

$$= \frac{3 - 1}{2}$$

Exemplo 2 – Solução

Se $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \\
&= \frac{3-1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

Se $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$c_1 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \qquad c_2 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}$$

$$= \frac{3-1}{2}$$

$$= 1$$

Exemplo 2 – Solução

Se $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$c_1 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$c_2 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} = \frac{3+1}{2}$$

Exemplo 2 – Solução

Se $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$c_1 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$c_2 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

Exemplo 2 – Solução

Se $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$c_1 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$c_2 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$c_3 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|^2}$$

Exemplo 2 – Solução

Se $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$c_1 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$c_2 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$c_3 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|^2} = \frac{8}{4}$$

Exemplo 2 – Solução

Se $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$c_1 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$c_2 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$c_3 = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|^2} = \frac{8}{4} = 2$$

Exemplo 2 – Solução

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$