Ortogonalização de Gram–Schmidt

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Projeção ortogonal

Ortogonalização de Gram–Schmidt

Exemplos

Projeção Ortogonal

A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ é

Projeção Ortogonal

A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ é

$$\vec{v}_{/\!/}$$

Projeção Ortogonal

A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ é

$$\vec{v}_{/\!/} = \text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v})$$

Projeção Ortogonal

A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ é

$$\vec{v}_{/\!/} \;=\; \text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v}) \;=\; \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\,\vec{w}$$

Projeção Ortogonal

A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ é

$$\vec{v}_{/\!/} \;=\; \text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v}) \;=\; \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\,\vec{w} \;=\; \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\,\vec{w}$$

Projeção Ortogonal

A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ é

$$\vec{v}_{/\!/} \;=\; \text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v}) \;=\; \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\,\vec{w} \;=\; \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\,\vec{w}$$

A componente perpendicular é

Projeção Ortogonal

A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ é

$$\vec{v}_{/\!/} \;=\; \text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v}) \;=\; \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\,\vec{w} \;=\; \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\,\vec{w}$$

A componente perpendicular é

$$\vec{v}_{\perp}$$

Projeção Ortogonal

A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ é

$$\vec{v}_{/\!/} \;=\; \text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v}) \;=\; \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\,\vec{w} \;=\; \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\,\vec{w}$$

A componente perpendicular é

$$\vec{v}_{\perp} \;=\; \vec{v} - \text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v})$$

Conteúdo

Projeção ortogonal

Ortogonalização de Gram–Schmidt

Exemplos

Gram–Schmidt

Dados vetores linearmente independentes

Gram–Schmidt

Dados vetores linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

Gram–Schmidt

Dados vetores linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

o processo de Gram–Schmidt constrói vetores ortogonais

Gram–Schmidt

Dados vetores linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

o processo de Gram–Schmidt constrói vetores ortogonais

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$$

Gram–Schmidt

Dados vetores linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

o processo de Gram–Schmidt constrói vetores ortogonais

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$$

que podem ser normalizados para produzir uma base ortonormal

Gram–Schmidt

Dados vetores linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

o processo de Gram–Schmidt constrói vetores ortogonais

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$$

que podem ser normalizados para produzir uma base ortonormal

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$$

Gram–Schmidt

Dados vetores linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

o processo de Gram–Schmidt constrói vetores ortogonais

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$$

que podem ser normalizados para produzir uma base ortonormal

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$$

com

Gram–Schmidt

Dados vetores linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

o processo de Gram–Schmidt constrói vetores ortogonais

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$$

que podem ser normalizados para produzir uma base ortonormal

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$$

com $\quad \text{ger}\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\} \;=\; \text{ger}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\} \;=\; \text{ger}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$

Gram–Schmidt: Orimeiro Vetor

Escolha

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

Gram–Schmidt: Orimeiro Vetor

Escolha

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

Normalize

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$$

Gram–Schmidt: segundo vetor

Retire de $\vec{v}_2$ sua componente na direção de $\vec{u}_1$

Gram–Schmidt: segundo vetor

Retire de $\vec{v}_2$ sua componente na direção de $\vec{u}_1$

$\vec{u}_2$

Gram–Schmidt: segundo vetor

Retire de $\vec{v}_2$ sua componente na direção de $\vec{u}_1$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2)$$

Gram–Schmidt: segundo vetor

Retire de $\vec{v}_2$ sua componente na direção de $\vec{u}_1$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \operatorname{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) \\ &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1\end{aligned}$$

Gram–Schmidt: segundo vetor

Retire de $\vec{v}_2$ sua componente na direção de $\vec{u}_1$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \operatorname{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) \\ &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1\end{aligned}$$

Depois normalize

Gram–Schmidt: segundo vetor

Retire de $\vec{v}_2$ sua componente na direção de $\vec{u}_1$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) \\ &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1\end{aligned}$$

Depois normalize

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}$$

Gram–Schmidt: terceiro vetor

Retire de $\vec{v}_3$ as componentes nas direções anteriores

Gram–Schmidt: terceiro vetor

Retire de $\vec{v}_3$ as componentes nas direções anteriores

$$\vec{u}_3$$

Gram–Schmidt: terceiro vetor

Retire de $\vec{v}_3$ as componentes nas direções anteriores

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - \text{proj}_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3)$$

Gram–Schmidt: terceiro vetor

Retire de $\vec{v}_3$ as componentes nas direções anteriores

$$\begin{aligned}\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \operatorname{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - \operatorname{proj}_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3) \\ &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\,\vec{u}_2\end{aligned}$$

Gram–Schmidt: terceiro vetor

Retire de $\vec{v}_3$ as componentes nas direções anteriores

$$\begin{aligned}\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \operatorname{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - \operatorname{proj}_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3) \\ &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\,\vec{u}_2\end{aligned}$$

Depois normalize

Gram–Schmidt: terceiro vetor

Retire de $\vec{v}_3$ as componentes nas direções anteriores

$$\begin{aligned}\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \operatorname{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - \operatorname{proj}_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3) \\ &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\,\vec{u}_2\end{aligned}$$

Depois normalize

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}$$

Gram–Schmidt em $\mathbb{R}^n$

Para $k \geq 2$

Gram–Schmidt em $\mathbb{R}^n$

Para $k \geq 2$

$$\vec{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{u}_j}{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_j} \vec{u}_j$$

Gram–Schmidt em $\mathbb{R}^n$

Para $k \geq 2$

$$\vec{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{u}_j}{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_j} \vec{u}_j$$

Depois

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|}$$

Gram–Schmidt em $\mathbb{R}^n$

Para $k \geq 2$

$$\vec{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{u}_j}{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_j} \vec{u}_j$$

Depois

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|}$$

Resultado $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ é uma base ortonormal

Conteúdo

Projeção ortogonal

Ortogonalização de Gram–Schmidt

Exemplos

Exemplo 1

Ortonormalize, pelo processo de Gram–Schmidt,

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 0) \qquad \vec{v}_2 = (1, 0, 1)$$

e obtenha uma base ortonormal de $\mathrm{ger}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$\vec{u}_1$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1, 1, 0)$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 = (1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0)$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = (1,1,0) \cdot (1,1,0)$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,0) \cdot (1,1,0) \\ &= 1^2 + 1^2 + 0^2\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,0) \cdot (1,1,0) \\ &= 1^2 + 1^2 + 0^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$\vec{u}_2$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,0) \cdot (1,1,0) \\ &= 1^2 + 1^2 + 0^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\ \vec{u}_1$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,0) \cdot (1,1,0) \\ &= 1^2 + 1^2 + 0^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,0) \cdot (1,1,0) \\ &= 1^2 + 1^2 + 0^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\ \vec{u}_1 \\ &= (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0)\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,0) \cdot (1,1,0) \\ &= 1^2 + 1^2 + 0^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\ \vec{u}_1 \\ &= (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) \\ &= (1,0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,0) \cdot (1,1,0) \\ &= 1^2 + 1^2 + 0^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\ \vec{u}_1 \\ &= (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) \\ &= (1,0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Base Ortogonal

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{(1,1,0),\ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$$

Exemplo 1 – Normalização

$\|\vec{u}_1\|$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \|(1,1,0)\|$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2}$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$\vec{e}_1$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Exemplo 1 – Normalização

$\|\vec{u}_2\|$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_2\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\|$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_2\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_2\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}}$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_2\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}}$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_2\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_2\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\vec{e}_2$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_2\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_2\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Exemplo 1 – Normalização

$$\|\vec{u}_2\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Exemplo 1 – Base Ortonormal

$$\mathcal{B}_2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

Exemplo 2

Ortonormalize a base

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ pelo processo de Gram–Schmidt

Exemplo 2 – Ortogonalização

$\vec{u}_1$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1, 1, 1)$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 = (1, 0, 1) \cdot (1, 1, 1)$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = (1,1,1) \cdot (1,1,1)$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1^2 + 1^2 + 1^2\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 3\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$\vec{u}_2$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 3\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\, \vec{u}_1$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 3\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\ \vec{u}_1 \\ &= (1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\ \vec{u}_1 \\ &= (1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3},\, 0 - \frac{2}{3},\, 1 - \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 &= (1,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 1^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\ \vec{u}_1 \\ &= (1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3},\, 0 - \frac{2}{3},\, 1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3},\, -\frac{2}{3},\, \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 = (0, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\
&= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 = (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\
&= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\
&= 2 \\
\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 &= (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\
&= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 &= (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{-2+1}{3}
\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\
&= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 &= (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 = (0,1,1) \cdot (1,1,1)$$
$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$$
$$= 2$$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 = (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 &= (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 &= (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 &= (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 &= (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1+4+1}{9}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 &= (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1+4+1}{9} \\ &= \frac{6}{9}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 &= (0,1,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 &= (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1+4+1}{9} \\ &= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$\vec{u}_3$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\,\vec{u}_2$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\,\vec{u}_2 \\ &= (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{-1/3}{2/3}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$\begin{aligned}
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\,\vec{u}_2 \\
&= (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{-1/3}{2/3}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= (0,1,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\,\vec{u}_2 \\
&= (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{-1/3}{2/3}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= (0,1,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(0 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}, \quad 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}, \quad 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\,\vec{u}_2 \\
&= (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{-1/3}{2/3}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= (0,1,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(0 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}, \quad 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}, \quad 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \left(\frac{-4-1}{6}, \frac{3-2+1}{3}, \frac{6-4-1}{6}\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Ortogonalização

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\,\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\,\vec{u}_2 \\
&= (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{-1/3}{2/3}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= (0,1,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(0 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}, \quad 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}, \quad 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \left(\frac{-4-1}{6}, \frac{3-2+1}{3}, \frac{6-4-1}{6}\right) = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Base Ortogonal

$$\mathcal{B}_1 = \left\{(1,1,1),\ \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)\right\}$$

Exemplo 2 – Normalização

$\|\vec{u}_1\|$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\|\vec{u}_2\|$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{e}_2$$

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}$$

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_2 &= \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_2 &= \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{3}(1,-2,1)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned}
\vec{e}_2 &= \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{3}(1,-2,1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}(1,-2,1)
\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned}
\vec{e}_2 &= \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{3}(1,-2,1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}(1,-2,1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)
\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Normalização

$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\begin{aligned}
\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 &= \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \\
&= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\
&= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36} \\
&= \frac{25 + 16 + 1}{36}
\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25 + 16 + 1}{36} = \frac{42}{36}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \qquad \|\vec{u}_3\|$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25 + 16 + 1}{36} = \frac{42}{36}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \qquad \|\vec{u}_3\| = \sqrt{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3}$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25 + 16 + 1}{36} = \frac{42}{36}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25 + 16 + 1}{36} = \frac{42}{36}$$

$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3}$$

$$= \sqrt{\frac{42}{36}}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25 + 16 + 1}{36} = \frac{42}{36}$$

$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3}$$

$$= \sqrt{\frac{42}{36}} = \frac{\sqrt{42}}{6}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25 + 16 + 1}{36} = \frac{42}{36}$$

$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3}$$

$$= \sqrt{\frac{42}{36}} = \frac{\sqrt{42}}{6}$$

$$\vec{e}_3$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25 + 16 + 1}{36} = \frac{42}{36}$$

$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3}$$

$$= \sqrt{\frac{42}{36}} = \frac{\sqrt{42}}{6}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25 + 16 + 1}{36} = \frac{42}{36}$$

$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3}$$

$$= \sqrt{\frac{42}{36}} = \frac{\sqrt{42}}{6}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{42}} \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

Exemplo 2 – Normalização

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25 + 16 + 1}{36} = \frac{42}{36}$$

$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3}$$

$$= \sqrt{\frac{42}{36}} = \frac{\sqrt{42}}{6}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{42}} \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{42}}(-5, 4, 1)$$

Exemplo 2 – Base Ortonormal

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \quad \frac{1}{\sqrt{42}}(-5,4,1) \right\}$$

Exemplo 3

Determine as coordenadas de

$$\vec{x} = (4, 2)$$

na base ortonormal

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right\}$$

Exemplo 3 – Solução

c_1

Exemplo 3 – Solução

$$c_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}_1$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \\
&= (4, 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\
&= \frac{4+2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\
&= \frac{4+2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\
&= \frac{4+2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}} \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \qquad\qquad c_2 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\
&= \frac{4+2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}} \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$c_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \qquad c_2 = \vec{x} \cdot \vec{e}_2$$

$$= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$$= \frac{4+2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}}$$

$$= 3\sqrt{2}$$

Exemplo 3 – Solução

$$c_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}_1$$
$$= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$
$$= \frac{4+2}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}}$$
$$= 3\sqrt{2}$$

$$c_2 = \vec{x} \cdot \vec{e}_2$$
$$= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\
&= \frac{4+2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}} \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
c_2 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_2 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \\
&= \frac{4-2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\
&= \frac{4+2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}} \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
c_2 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_2 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \\
&= \frac{4-2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\
&= \frac{4+2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}} \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
c_2 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_2 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \\
&= \frac{4-2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\
&= \frac{4+2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}} \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \vec{x} \cdot \vec{e}_2 \\
&= (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \\
&= \frac{4-2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}
$$