Autovalores e Autovetores

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Transformações Lineares

Autovetores

Autoespaços

Transformações Lineares

Uma transformação linear é uma função

Transformações Lineares

Uma transformação linear é uma função

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Transformações Lineares

Uma transformação linear é uma função

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

que satisfaz as seguintes propriedades

Transformações Lineares

Uma transformação linear é uma função

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

que satisfaz as seguintes propriedades

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Transformações Lineares

Uma transformação linear é uma função

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

que satisfaz as seguintes propriedades

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v})$$

Transformações Lineares

Uma transformação linear é uma função

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

que satisfaz as seguintes propriedades

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v})$$

para quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Representação Matricial

Toda transformação linear

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Representação Matricial

Toda transformação linear

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pode ser representada por uma matriz A

Representação Matricial

Toda transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pode ser representada por uma matriz A de ordem $m \times n$

Representação Matricial

Toda transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pode ser representada por uma matriz A de ordem $m \times n$

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Representação Matricial

Escrevendo

$$A$$

Representação Matricial

Escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Representação Matricial

Escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Representação Matricial

Escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A transformação linear fica

Representação Matricial

Escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A transformação linear fica

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Represente matricialmente a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

definida por

$$T(x, y) = (2x, y)$$

Avalie T em $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exemplo 1 – Representação Matricial

A representação matricial da transformação linear

$$T(x, y) = (2x, y)$$

Exemplo 1 – Representação Matricial

A representação matricial da transformação linear

$$T(x, y) = (2x, y)$$

é

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Representação Matricial

A representação matricial da transformação linear

$$T(x, y) = (2x, y)$$

é

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Avaliação

Avaliando T no vetor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Avaliação

Avaliando T no vetor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{v})$$

Exemplo 1 – Avaliação

Avaliando T no vetor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Avaliação

Avaliando T no vetor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Interpretação Geométrica

A transformação

$$T(x, y) = (2x, y)$$

Exemplo 1 – Interpretação Geométrica

A transformação

$$T(x, y) = (2x, y)$$

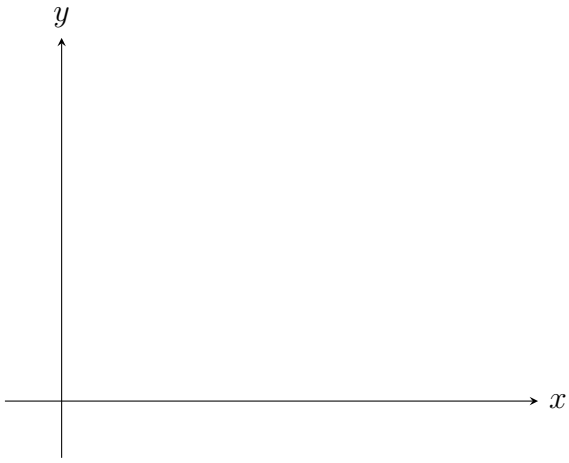
duplica a coordenada horizontal e mantém a coordenada vertical

Exemplo 1 – Interpretação Geométrica

O vetor é transformado em outro vetor

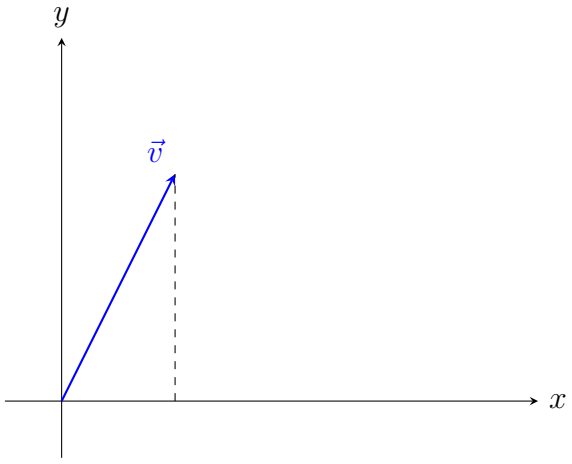
Exemplo 1 – Interpretação Geométrica

O vetor é transformado em outro vetor



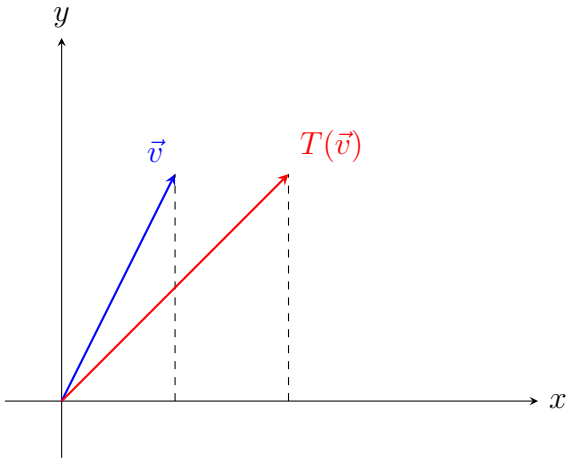
Exemplo 1 – Interpretação Geométrica

O vetor é transformado em outro vetor



Exemplo 1 – Interpretação Geométrica

O vetor é transformado em outro vetor



Exemplo 2

Represente matricialmente a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

definida por

$$T(x, y) = (3x, 2y)$$

Avalie T em $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 2 – Representação Matricial

A representação matricial da transformação linear

$$T(x, y) = (3x, 2y)$$

Exemplo 2 – Representação Matricial

A representação matricial da transformação linear

$$T(x, y) = (3x, 2y)$$

é

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{u}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{u}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{u})$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{u}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{u}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{v}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{v}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{v})$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{v}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{v}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{v}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\vec{v}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{v}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\vec{v}$$

A direção do vetor foi preservada

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{w}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{w}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{w})$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{w}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{w}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{w}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{w}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{w}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{w}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{w}$$

Exemplo 2 – Avaliação do Vetor $\vec{w}$

Avaliando T no vetor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$T(\vec{w}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{w}$$

A direção do vetor foi preservada

Conteúdo

Transformações Lineares

Autovetores

Autoespaços

Autovetores de uma Transformação Linear

Em uma transformação linear

Autovetores de uma Transformação Linear

Em uma transformação linear

alguns vetores especiais têm sua direção preservada

Autovetores de uma Transformação Linear

Em uma transformação linear

alguns vetores especiais têm sua direção preservada

Para esses vetores, a imagem é um múltiplo escalar do próprio vetor

Autovetores de uma Transformação Linear

Em uma transformação linear

alguns vetores especiais têm sua direção preservada

Para esses vetores, a imagem é um múltiplo escalar do próprio vetor

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

Autovetores de uma Transformação Linear

Em uma transformação linear

alguns vetores especiais têm sua direção preservada

Para esses vetores, a imagem é um múltiplo escalar do próprio vetor

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

Representação Matricial

Autovetores de uma Transformação Linear

Em uma transformação linear

alguns vetores especiais têm sua direção preservada

Para esses vetores, a imagem é um múltiplo escalar do próprio vetor

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

Representação Matricial

Como $T(\vec{v}) = A\vec{v}$,

Autovetores de uma Transformação Linear

Em uma transformação linear

alguns vetores especiais têm sua direção preservada

Para esses vetores, a imagem é um múltiplo escalar do próprio vetor

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

Representação Matricial

Como $T(\vec{v}) = A\vec{v}$, podemos escrever

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

Autovalores

Um autovetor é um vetor cuja direção é preservada

Autovalores

Um autovetor é um vetor cuja direção é preservada

quando o multiplicamos por uma matriz

Definição

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Definição

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é um autovetor de A quando

Definição

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é um autovetor de A quando

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Definição

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é um autovetor de A quando

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

λ é o autovalor de A associado a $\vec{v}$

Equação Característica

Temos n equações

Equação Característica

Temos n equações

Precisamos determinar $n + 1$ incognitas

Equação Característica

Temos n equações

Precisamos determinar $n + 1$ incognitas

As n componentes do autovetor $\vec{v}$

Equação Característica

Temos n equações

Precisamos determinar $n + 1$ incognitas

- As n componentes do autovetor $\vec{v}$
- O autovalor λ

Equação Característica

Temos n equações

Precisamos determinar $n + 1$ incognitas

- As n componentes do autovetor $\vec{v}$
- O autovalor λ

Precisamos de mais uma equação

Equação Característica

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Equação Característica

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

Equação Característica

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Equação Característica

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Para existir uma solução não nula

Equação Característica

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Para existir uma solução não nula

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Equação Característica

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Para existir uma solução não nula

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Essa é a equação característica de A

Polinômio Característico

O polinômio característico é

Polinômio Característico

O polinômio característico é

$$p_A(\lambda)$$

Polinômio Característico

O polinômio característico é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Polinômio Característico

O polinômio característico é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Polinômio Característico

O polinômio característico é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Suas raízes são os autovalores de A

Exemplo 3

Determine os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Exemplo 3 – Polinômio Característica

$p(\lambda)$

Exemplo 3 – Polinômio Característica

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Exemplo 3 – Polinômio Característica

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Polinômio Característica

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Polinômio Característica

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 1 \times 2
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Polinômio Característica

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 1 \times 2 \\
&= 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Polinômio Característica

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 1 \times 2 \\
&= 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) \;=\; \lambda^2 - 7\lambda + 10 \;=\; 0$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) \;=\; \lambda^2 - 7\lambda + 10 \;=\; 0$$

Δ

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta}$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9}$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 3}{2}$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

$$\lambda_2$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 3}{2}$$

Exemplo 3 – Equação Característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

Exemplo 4

Determine os autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Note que, no exercício anterior, determinamos os autovalores

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 2$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$-x + y = 0$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Assim

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Assim $\vec{v}$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Assim $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Assim $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Assim $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Os autovetores são
os múltiplos não nulos

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Assim $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Os autovetores são
os múltiplos não nulos de

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$y = -2x$$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$y = -2x$$

Assim

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$y = -2x$$

Assim $\vec{v}$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$y = -2x$$

Assim $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix}$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$y = -2x$$

Assim $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$y = -2x$$

Assim $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Os autovetores são
os múltiplos não nulos

Exemplo 4 – Autovetores Associados a $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$y = -2x$$

Assim $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Os autovetores são
os múltiplos não nulos de

$$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5

Determine os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

Exemplo 5 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda)$$

Exemplo 5 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Exemplo 5 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 5 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Exemplo 5 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Exemplo 5 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

Exemplo 5 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

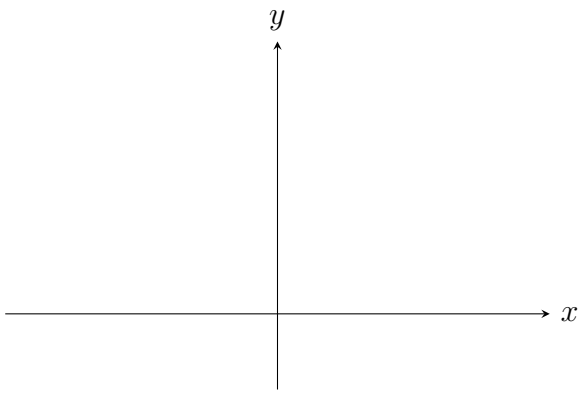
$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\nexists\, \lambda \in \mathbb{R}$$

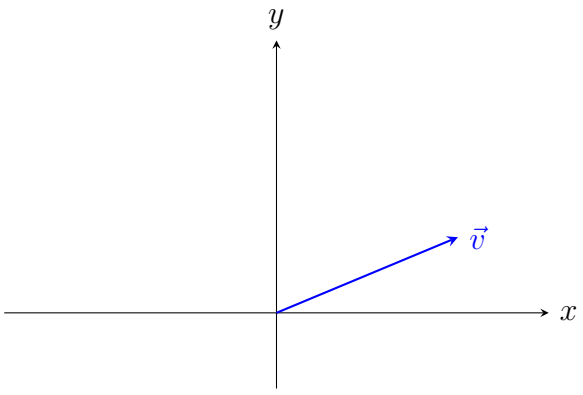
Exemplo 5 – Interpretação geométrica

Matriz de rotação de 90° no sentido anti-horário



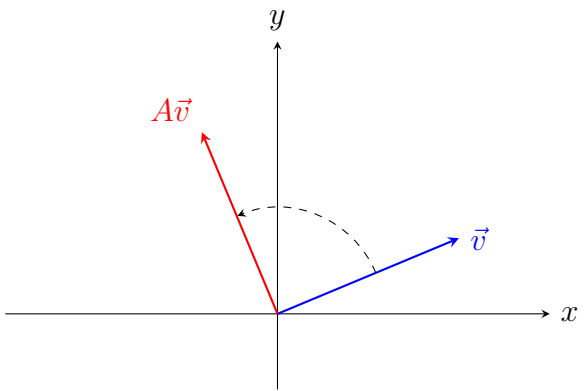
Exemplo 5 – Interpretação geométrica

Matriz de rotação de 90° no sentido anti-horário



Exemplo 5 – Interpretação geométrica

Matriz de rotação de 90° no sentido anti-horário



Conteúdo

Transformações Lineares

Autovetores

Autoespaços

Autoespaços

O autoespaço associado a um autovalor λ

Autoespaços

O autoespaço associado a um autovalor λ

contém o vetor nulo e todos os autovetores associados a λ

Autoespaços

O autoespaço associado a um autovalor λ

contém o vetor nulo e todos os autovetores associados a λ

$$E(\lambda) = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \right\}$$

Exemplo 6

Determine os autoespaços da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Note que é a mesma matriz de exemplos anteriores

Exemplo 6 – Solução

$E(5)$

Exemplo 6 – Solução

$$E(5) = \text{ger}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Exemplo 6 – Solução

$$E(5) = \text{ger}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,/\, x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = x\right\}$$

Exemplo 6 – Solução

$$E(5) = \text{ger}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle/ x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = x\right\}$$

$E(2)$

Exemplo 6 – Solução

$$E(5) = \text{ger}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,/\, x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = x\right\}$$

$$E(2) = \text{ger}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

Exemplo 6 – Solução

$$E(5) = \text{ger}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big/ x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = x\right\}$$

$$E(2) = \text{ger}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big/ x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = -2x\right\}$$

Exemplo 7

Determine os autovalores, os autovetores e os autoespaços da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 – Autovalores

Polinômio característico

Exemplo 7 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda)$$

Exemplo 7 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I)$$

Exemplo 7 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 7 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 7 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2(5-\lambda)
\end{aligned}
$$

Exemplo 7 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2(5-\lambda)
\end{aligned}
$$

Os autovalores são

Exemplo 7 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2(5-\lambda)
\end{aligned}
$$

Os autovalores são

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 5$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$(B - \lambda I)$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - \lambda I) = (B - 2I)$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - \lambda I) = (B - 2I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - \lambda I) = (B - 2I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - \lambda I) = (B - 2I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

$$x = t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

$x = t \in \mathbb{R}$

$y = 0$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

$$x = t \in \mathbb{R}$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

$$x = t \in \mathbb{R}$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Autovetor associado a $\lambda = 2$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 2$

$$(B - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

$$x = t \in \mathbb{R}$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Autovetor associado a $\lambda = 2$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7 – Autoespaço de $\lambda = 2$

$E(2)$

Exemplo 7 – Autoespaço de $\lambda = 2$

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo 7 – Autoespaço de $\lambda = 2$

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ t \in \mathbb{R} \right\} = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - \lambda I)$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - \lambda I) = (B - 5I)$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - \lambda I) = (B - 5I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - \lambda I) = (B - 5I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 0 \\ 0 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - \lambda I) = (B - 5I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 0 \\ 0 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

$$-3y = 0$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0} \qquad -3x + y = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

$$-3y = 0$$

$$y = 0$$

$$-3x + y = 0$$

$$-3x = 0$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

$$-3y = 0$$

$$y = 0$$

$$-3x + y = 0$$

$$-3x = 0$$

$$x = 0$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

$$-3y = 0$$
$$y = 0$$

$$-3x + y = 0$$
$$-3x = 0$$
$$x = 0$$
$$z = t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

$$-3y = 0$$
$$y = 0$$

$$-3x + y = 0$$
$$-3x = 0$$
$$x = 0$$
$$z = t \in \mathbb{R}$$

Autovetor associado a $\lambda = 5$

Exemplo 7 – Autovetores de $\lambda = 5$

$$(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

$$-3y = 0$$
$$y = 0$$

$$-3x + y = 0$$
$$-3x = 0$$
$$x = 0$$
$$z = t \in \mathbb{R}$$

Autovetor associado a $\lambda = 5$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7 – Autoespaço de $\lambda = 5$

$E(5)$

Exemplo 7 – Autoespaço de $\lambda = 5$

$$E(5) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \Big/ \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo 7 – Autoespaço de $\lambda = 5$

$$E(5) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \Big/ t \in \mathbb{R} \right\} = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 7 – Resposta

Autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$

Exemplo 7 – Resposta

Autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$

Autovetor e autoespaço associados a $\lambda_1 = 2$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E(2) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 7 – Resposta

Autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$

Autovetor e autoespaço associados a $\lambda_1 = 2$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E(2) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Autovetor e autoespaço associados a $\lambda_2 = 5$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E(5) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 8

Determine os autovalores, os autovetores e os autoespaços da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

Exemplo 8 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda)$$

Exemplo 8 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Exemplo 8 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Exemplo 8 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)
\end{aligned}
$$

Exemplo 8 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$$

Portanto

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = -1$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$

$y = 0$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$

$y = 0$

$z = 0$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Autovetor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$z = 0$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$z = 0$$

$$y = x$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$z = 0$$

$$y = x$$

Autovetor

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(A - (-1)I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(A - (-1)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(A - (-1)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = -1$

$z \in \mathbb{R}$

$$(A - (-1)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$z \in \mathbb{R}$$

$$(A - (-1)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$3x + y = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(A - (-1)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z \in \mathbb{R}$$

$$3x + y = 0$$

$$y = 0$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(A - (-1)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z \in \mathbb{R}$$

$$3x + y = 0$$

$$y = 0$$

$$x = 0$$

Exemplo 8 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(A - (-1)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z \in \mathbb{R}$$

$$3x + y = 0$$

$$y = 0$$

$$x = 0$$

Autovetor

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – Resposta

$\lambda_1 = 2$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E(2) = \text{ger}\,\{\vec{v}_1\}$

$\lambda_2 = 3$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E(3) = \text{ger}\,\{\vec{v}_2\}$

$\lambda_3 = -1$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E(-1) = \text{ger}\,\{\vec{v}_3\}$

Exemplo 9

Determine os autovalores, os autovetores e os autoespaços da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

Exemplo 9 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda)$$

Exemplo 9 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Exemplo 9 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 9 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda)
\end{aligned}
$$

Exemplo 9 – Autovalores

Os autovalores são as raízes do polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda)
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = -2$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - 1I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - 1I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - 1I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - 1I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - 1I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$

$y = 0$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - 1I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - 1I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Autovetor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$z = 0$$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = 0$$

$$-2x + y = 0$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = 0$$

$$-2x + y = 0$$

$$y = 2x$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = 0$$

$$-2x + y = 0$$

$$y = 2x$$

Autovetor

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = -2$

$$(A - (-2)I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = -2$

$$(A - (-2)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = -2$

$$(A - (-2)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = -2$

$$y = 0$$

$$(A - (-2)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = -2$

$$(A - (-2)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = 0$$

$$3x + y = 0$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = -2$

$$(A - (-2)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = 0$$

$$3x + y = 0$$

$$x = 0$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = -2$

$$(A - (-2)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = 0$$

$$3x + y = 0$$

$$x = 0$$

$$z \in \mathbb{R}$$

Exemplo 9 – Autovetores para $\lambda = -2$

$$(A - (-2)I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = 0$$

$$3x + y = 0$$

$$x = 0$$

$$z \in \mathbb{R}$$

Autovetor

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – Resposta

$\lambda_1 = 1$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E(2) = \text{ger}\,\{\vec{v}_1\}$

$\lambda_2 = 3$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E(3) = \text{ger}\,\{\vec{v}_2\}$

$\lambda_3 = -2$

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E(-2) = \text{ger}\,\{\vec{v}_3\}$