Diagonalização de Matrizes

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Diagonalização

Exemplos

Matriz Diagonal

Uma matriz quadrada D é diagonal

Matriz Diagonal

Uma matriz quadrada D é diagonal

quando todos os elementos fora da diagonal principal são nulos

Matriz Diagonal

Uma matriz quadrada D é diagonal

quando todos os elementos fora da diagonal principal são nulos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal

Uma matriz quadrada D é diagonal

quando todos os elementos fora da diagonal principal são nulos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Matriz Diagonal

Uma matriz quadrada D é diagonal

quando todos os elementos fora da diagonal principal são nulos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

As operações com matrizes diagonais são especialmente simples

Matrizes Semelhantes

Duas matrizes A e D são semelhantes

Matrizes Semelhantes

Duas matrizes A e D são semelhantes

quando existe uma matriz invertível P

Matrizes Semelhantes

Duas matrizes A e D são semelhantes

quando existe uma matriz invertível P

$$D = P^{-1}AP$$

Matrizes Semelhantes

Duas matrizes A e D são semelhantes

quando existe uma matriz invertível P

$$D = P^{-1}AP$$

Equivalentemente

$$A = PDP^{-1}$$

Matrizes Diagonalizável

Uma matriz A é diagonalizável quando é semelhante a uma matriz diagonal

Autovetores e Diagonalização

Considere que A_n possui n autovetores ($A\vec{v} = \lambda\vec{v}$)

Autovetores e Diagonalização

Considere que A_n possui n autovetores ($A\vec{v} = \lambda\vec{v}$)

linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

Autovetores e Diagonalização

Considere que A_n possui n autovetores ($A\vec{v} = \lambda\vec{v}$)

linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

associados ao autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Autovetores e Diagonalização

Considere que A_n possui n autovetores ($A\vec{v} = \lambda\vec{v}$)

linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

associados ao autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Definimos

$$P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Autovetores e Diagonalização

Considere que A_n possui n autovetores ($A\vec{v} = \lambda\vec{v}$)

linearmente independentes

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$$

associados ao autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Definimos

$$P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Calculando AP

AP

Calculando AP

$$AP = A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

Calculando AP

$$
\begin{aligned}
AP &= A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Calculando AP

$$
\begin{aligned}
AP &= A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Calculando AP

$$
\begin{aligned}
AP &= A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)
\end{aligned}
$$

Calculando AP

$$
\begin{aligned}
AP &= A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)
\end{aligned}
$$

$$AP = PD$$

Calculando AP

$$
\begin{aligned}
AP &= A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
AP &= PD \\
A &= PDP^{-1}
\end{aligned}
$$

Calculando AP

$$
\begin{aligned}
AP &= A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
AP &= PD \\
A &= PDP^{-1} \\
P^{-1}AP &= D
\end{aligned}
$$

Critério de Diagonalização

1. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável

Critério de Diagonalização

1. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável

   se, e somente se, possui n autovetores linearmente independentes

Critério de Diagonalização

1. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável

   se, e somente se, possui n autovetores linearmente independentes

2. Se A possui n autovalores distintos, então é diagonalizável

Critério de Diagonalização

1. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável

   se, e somente se, possui n autovetores linearmente independentes

2. Se A possui n autovalores distintos, então é diagonalizável

3. Autovalores repetidos não impedem a diagonalização

Conteúdo

Diagonalização

Exemplos

Exemplo 1

Diagonalize a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine P e D tais que $A = PDP^{-1}$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda)$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico Δ

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\ &= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

λ_1

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+3}{2}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+3}{2} = 5$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$\lambda_2$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2$$

$$= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-3}{2}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\
&= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-3}{2} = 2$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_1 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_1 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_1 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_1 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_1 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_1 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_1 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_1 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_1 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(5) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 0$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 0$$

$$y = -2x$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escolhendo $x = 1$

$$2x + y = 0$$

$$y = -2x$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 0$$

$$y = -2x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -2$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 0$$

$$y = -2x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -2$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 0$$

$$y = -2x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -2$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E(2) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 1 – Construção de P e D

Colocamos os autovetores nas colunas de P

Exemplo 1 – Construção de P e D

Colocamos os autovetores nas colunas de P

P

Exemplo 1 – Construção de P e D

Colocamos os autovetores nas colunas de P

$$P = [\vec{v}_2 \quad \vec{v}_2]$$

Exemplo 1 – Construção de P e D

Colocamos os autovetores nas colunas de P

$$P = [\vec{v}_2 \quad \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – Construção de P e D

Colocamos os autovetores nas colunas de P

$$P = [\vec{v}_2 \quad \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Na mesma ordem dos autovalores de D

Exemplo 1 – Construção de P e D

Colocamos os autovetores nas colunas de P

$$P = [\vec{v}_2 \quad \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Na mesma ordem dos autovalores de D

$$D$$

Exemplo 1 – Construção de P e D

Colocamos os autovetores nas colunas de P

$$P = [\vec{v}_2 \quad \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Na mesma ordem dos autovalores de D

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$$

Exemplo 1 – Construção de P e D

Colocamos os autovetores nas colunas de P

$$P = [\vec{v}_2 \quad \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Na mesma ordem dos autovalores de D

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \text{diag}(5, 2)$$

Exemplo 1 – Construção de P e D

Colocamos os autovetores nas colunas de P

$$P = [\vec{v}_2 \quad \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Na mesma ordem dos autovalores de D

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \text{diag}(5, 2) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – Verificação – Cálculo de P^{-1}

Para uma matriz de ordem 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – Verificação – Cálculo de P^{-1}

Para uma matriz de ordem 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante de P

Exemplo 1 – Verificação – Cálculo de P^{-1}

Para uma matriz de ordem 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante de P

$$\det(P)$$

Exemplo 1 – Verificação – Cálculo de P^{-1}

Para uma matriz de ordem 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante de P

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Exemplo 1 – Verificação – Cálculo de P^{-1}

Para uma matriz de ordem 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante de P

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1$$

Exemplo 1 – Verificação – Cálculo de P^{-1}

Para uma matriz de ordem 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante de P

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

Exemplo 1 – Verificação – Cálculo de P^{-1}

Para uma matriz de ordem 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante de P

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

P^{-1}

Exemplo 1 – Verificação – Cálculo de P^{-1}

Para uma matriz de ordem 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante de P

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – Verificação – Cálculo de P^{-1}

Para uma matriz de ordem 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante de P

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – Verificação – Diagonalização

PDP^{-1}

Exemplo 1 – Verificação – Diagonalização

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

Exemplo 1 – Verificação – Diagonalização

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} P^{-1}$$

Exemplo 1 – Verificação – Diagonalização

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – Verificação – Diagonalização

$$
\begin{aligned}
PDP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Verificação – Diagonalização

$$
\begin{aligned}
PDP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Verifique se a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ é diagonalizável

Exemplo 2

Verifique se a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ é diagonalizável

Precisamos de 3 autovetores linearmente independentes

Exemplo 2 – Autovalores

Como a matriz é triangular

$$p(\lambda)$$

Exemplo 2 – Autovalores

Como a matriz é triangular

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 2 – Autovalores

Como a matriz é triangular

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(5-\lambda)$$

Exemplo 2 – Autovalores

Como a matriz é triangular

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(5-\lambda)$$

Os autovalores são

Exemplo 2 – Autovalores

Como a matriz é triangular

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(5-\lambda)$$

Os autovalores são

$$\lambda_1 = 2$$

Exemplo 2 – Autovalores

Como a matriz é triangular

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(5-\lambda)$$

Os autovalores são

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 5$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R} \qquad y = 0$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R} \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

Escolhendo $x = 1$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R} \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R} \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

Escolhendo $x = 1$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R} \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

Escolhendo $x = 1$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 0 \\ 0 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 0 \\ 0 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 0 \\ 0 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$z \in \mathbb{R}$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 0 \\ 0 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z \in \mathbb{R} \qquad y = 0$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 0 \\ 0 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z \in \mathbb{R} \qquad y = 0 \qquad x = 0$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 0 \\ 0 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escolhendo $z = 1$

$z \in \mathbb{R} \qquad y = 0 \qquad x = 0$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 0 \\ 0 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$z \in \mathbb{R} \qquad y = 0 \qquad x = 0$

Escolhendo $z = 1$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Autovetores para $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 0 \\ 0 & 2-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$z \in \mathbb{R} \qquad y = 0 \qquad x = 0$

Escolhendo $z = 1$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(5) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 2 – Conclusão

Falta um autovalor independente

Exemplo 2 – Conclusão

Falta um autovalor independente

Logo B não é diagonalizável

Exemplo 3

Diagonalize, se possível, a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$p(\lambda)$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico Δ

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 - 1 \\ &= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lambda_1$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$\lambda_2$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2} = 1$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(3) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

$$y = -x$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escolhendo $x = 1$

$$x + y = 0$$

$$y = -x$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

$$y = -x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -1$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

$$y = -x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

$$y = -x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E(1) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 3 – Diagonalização

As matrizes são

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$