Diagonalização de Matrizes Simétricas

Luis Alberto D'Afonseca

Geometria Analítica e Álgebra Linear

https://material-didatico.github.io/pages/gaal

10 de novembro de 2026

Conteúdo

Matrizes Simétricas e Matizes Ortogonais

Diagonalização de Matrizes Simétricas

Exemplos

Matrizes simétricas

Uma matriz quadrada A é simétrica quando

$$A^t = A$$

Matrizes simétricas

Uma matriz quadrada A é simétrica quando

$$A^t = A$$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagonalização

A é diagonalizável se existe P invertível e D diagonal,

Diagonalização

A é diagonalizável se existe P invertível e D diagonal,

$$A = PDP^{-1}$$

Diagonalização

A é diagonalizável se existe P invertível e D diagonal,

$$A = PDP^{-1}$$

As colunas de P são autovetores de A

Diagonalização

A é diagonalizável se existe P invertível e D diagonal,

$$A = PDP^{-1}$$

As colunas de P são autovetores de A

Os elementos da diagonal de D são os autovalores correspondentes

Matriz Ortogonal

Uma matriz quadrada P é ortogonal quando

$$P^t P = I$$

Matriz Ortogonal

Uma matriz quadrada P é ortogonal quando

$$P^t P = I$$

isto é

$$P^{-1} = P^t$$

Colunas de uma Matriz Ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

Colunas de uma Matriz Ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

$$P^t P$$

Colunas de uma Matriz Ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

$$P^t P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^{\,t} \\ \vec{v}_2^{\,t} \\ \vdots \\ \vec{v}_n^{\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

Colunas de uma Matriz Ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

$$P^t P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^{\,t} \\ \vec{v}_2^{\,t} \\ \vdots \\ \vec{v}_n^{\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^{\,t}\vec{v}_1 & \vec{v}_1^{\,t}\vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_1^{\,t}\vec{v}_n \\ \vec{v}_2^{\,t}\vec{v}_1 & \vec{v}_2^{\,t}\vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_2^{\,t}\vec{v}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{v}_n^{\,t}\vec{v}_1 & \vec{v}_n^{\,t}\vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n^{\,t}\vec{v}_n \end{bmatrix}$$

Colunas de uma Matriz Ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

$$P^t P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^t \\ \vec{v}_2^t \\ \vdots \\ \vec{v}_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^t\vec{v}_1 & \vec{v}_1^t\vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_1^t\vec{v}_n \\ \vec{v}_2^t\vec{v}_1 & \vec{v}_2^t\vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_2^t\vec{v}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{v}_n^t\vec{v}_1 & \vec{v}_n^t\vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n^t\vec{v}_n \end{bmatrix} = I$$

Colunas de uma Matriz Ortogonal

$\vec{v}_i^t \vec{v}_j$

Colunas de uma Matriz Ortogonal

$$\vec{v}_i^t \vec{v}_j \;=\; \delta_{ij}$$

Colunas de uma Matriz Ortogonal

$$\vec{v}_i^{\,t}\vec{v}_j \;=\; \delta_{ij} \;=\; \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Colunas de uma Matriz Ortogonal

$$\vec{v}_i^{\,t}\vec{v}_j \;=\; \delta_{ij} \;=\; \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

As colunas de P são vetores ortonormais

Conteúdo

Matrizes Simétricas e Matizes Ortogonais

Diagonalização de Matrizes Simétricas

Exemplos

Diagonalização Ortogonal

Uma matriz A é ortogonalmente diagonalizável

Diagonalização Ortogonal

Uma matriz A é ortogonalmente diagonalizável

quando existem uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D

Diagonalização Ortogonal

Uma matriz A é ortogonalmente diagonalizável

quando existem uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D

tais que

$$A = PDP^t$$

Teorema Espectral para Matrizes Simétricas

Toda matriz real simétrica é ortogonalmente diagonalizável

Teorema Espectral para Matrizes Simétricas

Toda matriz real simétrica é ortogonalmente diagonalizável

Existe uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que

$$A = PDP^t$$

Propriedades das Matrizes Simétricas

- Todos os autovalores de A são reais

Propriedades das Matrizes Simétricas

- Todos os autovalores de A são reais
- Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais

Propriedades das Matrizes Simétricas

- Todos os autovalores de A são reais
- Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais
- É possível construir uma base ortonormal de autovetores

Autovetores de Autovalores Distintos

Verificando que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais

Autovetores de Autovalores Distintos

Verificando que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais

Seja A uma matriz simétrica e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ autovetores

Autovetores de Autovalores Distintos

Verificando que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais

Seja A uma matriz simétrica e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ autovetores

associados aos autovalores distintos λ e μ

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Autovetores de autovalores distintos

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $\qquad$ $A\vec{w} = \mu\vec{w}$

Autovetores de autovalores distintos

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $A\vec{w} = \mu\vec{w}$ $\lambda \neq \mu$

Autovetores de autovalores distintos

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $A\vec{w} = \mu\vec{w}$ $\lambda \neq \mu$

$\vec{v}^t A\vec{w}$

Autovetores de autovalores distintos

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $A\vec{w} = \mu\vec{w}$ $\lambda \neq \mu$

$\vec{v}^t A\vec{w} = \vec{v}^t(A\vec{w})$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned}\vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w})\end{aligned}$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned}\vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w}\end{aligned}$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned}\vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w}\end{aligned} \qquad \vec{v}^t A\vec{w}$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned}\vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w}\end{aligned} \qquad \vec{v}^t A\vec{w} = (\vec{v}^t A)\vec{w}$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= (\vec{v}^t A)\vec{w} \\ &= (\vec{v}^t A^t)\vec{w} \end{aligned}$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= (\vec{v}^t A)\vec{w} \\ &= (\vec{v}^t A^t)\vec{w} \\ &= (A\vec{v})^t\vec{w} \end{aligned}$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= (\vec{v}^t A)\vec{w} \\ &= (\vec{v}^t A^t)\vec{w} \\ &= (A\vec{v})^t\vec{w} \\ &= \lambda\vec{v}^t\vec{w} \end{aligned}$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned}\vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\vec{v}^t A\vec{w} &= (\vec{v}^t A)\vec{w} \\ &= (\vec{v}^t A^t)\vec{w} \\ &= (A\vec{v})^t\vec{w} \\ &= \lambda\vec{v}^t\vec{w}\end{aligned} \qquad \lambda\vec{v}^t\vec{w} = \mu\vec{v}^t\vec{w}$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned}\vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\vec{v}^t A\vec{w} &= (\vec{v}^t A)\vec{w} \\ &= (\vec{v}^t A^t)\vec{w} \\ &= (A\vec{v})^t\vec{w} \\ &= \lambda\vec{v}^t\vec{w}\end{aligned}$$

$$\lambda\vec{v}^t\vec{w} = \mu\vec{v}^t\vec{w}$$

$$\lambda\vec{v}^t\vec{w} - \mu\vec{v}^t\vec{w} = 0$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= (\vec{v}^t A)\vec{w} \\ &= (\vec{v}^t A^t)\vec{w} \\ &= (A\vec{v})^t\vec{w} \\ &= \lambda\vec{v}^t\vec{w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda\vec{v}^t\vec{w} &= \mu\vec{v}^t\vec{w} \\ \lambda\vec{v}^t\vec{w} - \mu\vec{v}^t\vec{w} &= 0 \\ (\lambda - \mu)\vec{v}^t\vec{w} &= 0 \end{aligned}$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= (\vec{v}^t A)\vec{w} \\ &= (\vec{v}^t A^t)\vec{w} \\ &= (A\vec{v})^t\vec{w} \\ &= \lambda\vec{v}^t\vec{w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda\vec{v}^t\vec{w} &= \mu\vec{v}^t\vec{w} \\ \lambda\vec{v}^t\vec{w} - \mu\vec{v}^t\vec{w} &= 0 \\ (\lambda - \mu)\vec{v}^t\vec{w} &= 0 \\ \vec{v}^t\vec{w} &= 0 \end{aligned}$$

Autovetores de autovalores distintos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad A\vec{w} = \mu\vec{w} \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= \vec{v}^t(A\vec{w}) \\ &= \vec{v}^t(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^t\vec{w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{v}^t A\vec{w} &= (\vec{v}^t A)\vec{w} \\ &= (\vec{v}^t A^t)\vec{w} \\ &= (A\vec{v})^t\vec{w} \\ &= \lambda\vec{v}^t\vec{w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda\vec{v}^t\vec{w} &= \mu\vec{v}^t\vec{w} \\ \lambda\vec{v}^t\vec{w} - \mu\vec{v}^t\vec{w} &= 0 \\ (\lambda - \mu)\vec{v}^t\vec{w} &= 0 \\ \vec{v}^t\vec{w} &= 0 \\ \vec{v} &\perp \vec{w} \end{aligned}$$

Passo a Passo

Para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica A

Passo a Passo

Para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica A

1. Determine os autovalores de A

Passo a Passo

Para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica A

1. Determine os autovalores de A
2. Determine uma base de cada autoespaço

Passo a Passo

Para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica A

1. Determine os autovalores de A
2. Determine uma base de cada autoespaço
3. Construa uma base ortonormal de autovetores

Passo a Passo

Para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica A

1. Determine os autovalores de A
2. Determine uma base de cada autoespaço
3. Construa uma base ortonormal de autovetores
4. Organize os autovetores nas colunas de P

Passo a Passo

Para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica A

1. Determine os autovalores de A
2. Determine uma base de cada autoespaço
3. Construa uma base ortonormal de autovetores
4. Organize os autovetores nas colunas de P
5. Organize os autovalores correspondentes na diagonal de D

Passo a Passo

Para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica A

1. Determine os autovalores de A
2. Determine uma base de cada autoespaço
3. Construa uma base ortonormal de autovetores
4. Organize os autovetores nas colunas de P
5. Organize os autovalores correspondentes na diagonal de D

Ao final

$$A = PDP^t$$

Autovalores Repetidos?

Uma matriz simétrica pode possuir autovalores repetidos

Autovalores Repetidos?

Uma matriz simétrica pode possuir autovalores repetidos

Nesse caso, o autoespaço associado ao autovalor pode ter dimensão maior que um

Autovalores Repetidos?

Uma matriz simétrica pode possuir autovalores repetidos

Nesse caso, o autoespaço associado ao autovalor pode ter dimensão maior que um

É possível escolher uma base ortonormal para cada autoespaço

Autovalores Repetidos?

Uma matriz simétrica pode possuir autovalores repetidos

Nesse caso, o autoespaço associado ao autovalor pode ter dimensão maior que um

É possível escolher uma base ortonormal para cada autoespaço

Se necessário, podemos utilizar o processo de Gram-Schmidt

Conteúdo

Matrizes Simétricas e Matizes Ortogonais

Diagonalização de Matrizes Simétricas

Exemplos

Exemplo 1

Diagonalize ortogonalmente a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine as matrizes P e D tais que $A = PDP^t$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda)$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 6
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Autovalores

Δ

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 6
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 6
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

λ_1

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 6
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 6
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{2}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{2} = 1$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{2} = 1$$

λ_2

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 6
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 6
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+5}{2}$$

Exemplo 1 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 6
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+5}{2} = 6$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4x + 2y = 0$$

$$2x + y = 0$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4x + 2y = 0$$

$$2x + y = 0$$

Escolhendo $x = 1$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4x + 2y = 0$$

$$2x + y = 0$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -2$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4x + 2y = 0$$

$$2x + y = 0$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -2$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4x + 2y = 0$$

$$2x + y = 0$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -2$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E(1) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}_1\|$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2}$$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Autovetor unitário

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_1$$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 6$

$$(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 6$

$$(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 6$

$$(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + 2y = 0$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 6$

$$(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + 2y = 0$$

$$x = 2y$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 6$

Escolhendo $y = 1$

$$(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + 2y = 0$$

$$x = 2y$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 6$

$$(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + 2y = 0$$

$$x = 2y$$

Escolhendo $y = 1$

$$x = 2$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 6$

$$(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + 2y = 0$$

$$x = 2y$$

Escolhendo $y = 1$

$$x = 2$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Autovetores para $\lambda = 6$

$$(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + 2y = 0$$

$$x = 2y$$

Escolhendo $y = 1$

$$x = 2$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(6) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}_2\|$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Autovetor unitário

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_2$$

Exemplo 1 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Diagonalização

Organizamos os autovetores unitário nas colunas de P

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Diagonalização

Organizamos os autovetores unitário nas colunas de P

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal correspondente é

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2

Diagonalize ortogonalmente a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine as matrizes P e D tais que $B = PDP^t$

Essa matriz já é diagonal, este exercício é apenas um treino

Exemplo 2 – Autovalores

Polinômio característico

Exemplo 2 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda)$$

Exemplo 2 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I)$$

Exemplo 2 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 2 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2$$

Exemplo 2 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2$$

Autovalor

$$\lambda = 4$$

Exemplo 2 – Autoespaço

Equação característica

Exemplo 2 – Autoespaço

Equação característica

$$(B - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 2 – Autoespaço

Equação característica

$$(B - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Autoespaço

Equação característica

$$(B - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Não há restrições

Exemplo 2 – Autoespaço

Equação característica

$$(B - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Não há restrições

Autoespaço

$$E(4) = \mathbb{R}^2$$

Exemplo 2 – Base ortonormal

Podemos escolher os vetores ortonormais

Exemplo 2 – Base ortonormal

Podemos escolher os vetores ortonormais

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Base ortonormal

Podemos escolher os vetores ortonormais

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Base ortonormal

Podemos escolher os vetores ortonormais

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u}_1\| = 1$$

$$\|\vec{u}_2\| = 1$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

Exemplo 2 – Diagonalização

Organizamos os autovetores nas colunas de P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal é

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$B = PDP^t$$

Exemplo 3

Diagonalize ortogonalmente a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine as matrizes P e D tais que $C = PDP^t$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda)$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(C - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2 - 4
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(C - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2 - 4 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda - 3
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Autovalores

Δ

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(C - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2 - 4 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda - 3
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(C - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(C - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2 - 4 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda - 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(C - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2 - 4 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda - 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$\lambda_1$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(C - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2 - 4 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda - 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(C - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2 - 4 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda - 3
\end{aligned}
$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$\lambda_2$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2}$$

Exemplo 3 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2} = 3$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + 2y = 0$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + 2y = 0$$

$$y = -x$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = -1$

Escolhendo $x = 1$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + 2y = 0$$

$$y = -x$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + 2y = 0$$

$$y = -x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -1$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + 2y = 0$$

$$y = -x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -1$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = -1$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + 2y = 0$$

$$y = -x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -1$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E(1) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}_1\|$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_1$$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x - 2y = 0$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x - 2y = 0$$

$$y = x$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = 3$

Escolhendo $x = 1$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x - 2y = 0$$

$$y = x$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x - 2y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x - 2y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Autovetores para $\lambda = 3$

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x - 2y = 0$$

$$y = x$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(3) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}_2\|$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_2$$

Exemplo 3 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Diagonalização

Organizamos os autovetores nas colunas de P

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Diagonalização

Organizamos os autovetores nas colunas de P

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal é

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Diagonalização

Organizamos os autovetores nas colunas de P

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal é

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$C = PDP^t$$

Exemplo 4

Diagonalize ortogonalmente a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine as matrizes P e D tais que $A = PDP^t$

Exemplo 4 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda)$$

Exemplo 4 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Exemplo 4 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}(4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}(4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right]$$

Exemplo 4 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}(4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right]$$

$$= (4-\lambda)\left[4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1\right]$$

Exemplo 4 – Autovalores

Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}(4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right]$$

$$= (4-\lambda)\left[4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1\right]$$

$$= (4-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right)$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$\lambda_1 = 4$ ou $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

Δ

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4 \qquad \sqrt{\Delta}$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4}$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$

$$\lambda_2$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$

$$\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 1\times 3=4 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$

$$\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{2}$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$

$$\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{2}=3$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$

$$\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{2}=3$$

$$\lambda_3$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$

$$\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{2}=3$$

$$\lambda_3=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$

$$\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{2}=3$$

$$\lambda_3=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-2}{2}$$

Exemplo 4 – Autovalores

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda_1=4 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=4 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$

$$\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{2}=3$$

$$\lambda_3=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-2}{2}=1$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + y = 0$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + y = 0$$

$$y = 2x$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + y = 0$$

$$y = 2x$$

$$x - 2y =$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + y = 0$$

$$y = 2x$$

$$x - 2y = x - 4x =$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + y = 0$$

$$y = 2x$$

$$x - 2y = x - 4x = -x = 0$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + y = 0$$

$$y = 2x$$

$$x - 2y = x - 4x = -x = 0$$

$$y = 0$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escolhendo $z = 1$

$$-2x + y = 0$$

$$y = 2x$$

$$x - 2y = x - 4x = -x = 0$$

$$y = 0$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + y = 0$$

$$y = 2x$$

$$x - 2y = x - 4x = -x = 0$$

$$y = 0$$

Escolhendo $z = 1$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_1 = 4$

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + y = 0$$

$$y = 2x$$

$$x - 2y = x - 4x = -x = 0$$

$$y = 0$$

Escolhendo $z = 1$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(4) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}_2\|$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

Autovetor unitário

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

Autovetor unitário

$\vec{u}_1$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_1$

Norma de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_2 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_2 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_2 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$z = 0$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_2 = 3$

Escolhendo $x = 1$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$z = 0$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_2 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$z = 0$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_2 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$z = 0$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_2 = 3$

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$z = 0$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = 1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(3) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}_2\|$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_2$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_2$

Norma de $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_3 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_3 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_3 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

$$z = 0$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_3 = 1$

Escolhendo $x = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

$$z = 0$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_3 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

$$z = 0$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -1$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_3 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

$$z = 0$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -1$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Autovetores para $\lambda_3 = 1$

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Escolhendo $x = 1$

$$y = -1$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(1) = \text{ger}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_3$

Norma de $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_3$

Norma de $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}_3\|$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_3$

Norma de $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_3$

Norma de $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_3$

Norma de $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_3$

Norma de $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_3$$

Exemplo 4 – Normalização de $\vec{v}_3$

Norma de $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Autovetor unitário

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Base Ortonormal

Autovetores unitários

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Diagonalização

Organizamos os autovetores nas colunas de P

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Organizamos os autovalores na diagonal de D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5

Sabendo que os autovalores da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

são $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 2$

Determine as matrizes P e D tais que $B = PDP^t$

Exemplo 5 – Autovalores

Calculamos o polinômio característico

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(2-\lambda)^2
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 2$$

O autovalor 2 possui multiplicidade algébrica dois

Exemplo 5 – Autoespaço para $\lambda = 5$

Resolvemos

$$(B - 5I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema equivalente fornece

$$-2x + y + z = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

$$x + y - 2z = 0$$

Subtraindo as equações

Exemplo 5 – Autoespaço para $\lambda = 5$

Portanto

$$E_5 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Escolhemos

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sua norma é

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{3}$$

O autovetor unitário é

Exemplo 5 – Autoespaço para $\lambda = 2$

Resolvemos

$$(B - 2I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema equivalente é

$$x + y + z = 0$$

Escolhendo $x = s$ e $y = t$

$$z = -s - t$$

Exemplo 5 – Autoespaço para $\lambda = 2$

Portanto

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s-t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Temos

$$\dim(E_2) = 2$$

Exemplo 5 – Ortogonalização

Escolhemos os vetores

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1$$

$$\|\vec{v}_2\|^2 = 2$$

Aplicamos Gram-Schmidt

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|^2}\vec{w}_2$$

Exemplo 5 – Ortogonalização

Substituindo

$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Podemos multiplicar por 2 sem alterar a direção

$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Normalização

Calculamos as normas

$$\begin{aligned}\|\vec{w}_2\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \\ \|\vec{w}_3\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

Os vetores unitários são

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Base Ortonormal

Obtivemos a base ortonormal de autovetores

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

O primeiro vetor pertence a E_5

Exemplo 5 – Matriz ortogonal

Organizamos os autovetores nas colunas de P

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

Como as colunas formam uma base ortonormal

$$P^t P = I$$

Exemplo 5 – Matriz diagonal

Os autovalores correspondentes aos vetores das colunas de P são

$$5 \qquad 2 \qquad 2$$

Portanto

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Assim

$$B = PDP^t$$

Exemplo 5 – Resposta

A matriz ortogonal é

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal é

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$B = PDP^t$$