

NOME _____

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20] Use **integral por partes** para calcular a integral $\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

Calculando a integral indefinida por partes $\int u dv = uv - \int v du$

Escolhendo

$$u = \ln(x) \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} dx$$

temos

$$du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$$

então

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx &= \ln(x)2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \frac{dx}{x} \\ &= 2\sqrt{x} \ln(x) - 2 \int x^{1/2-1} dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln(x) - 2 \int x^{-1/2} dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln(x) - 2 \cdot 2\sqrt{x} + c \\ &= 2\sqrt{x} (\ln(x) - 2) + c \end{aligned}$$

Calculando a integral definida

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} (\ln(x) - 2) \Big|_1^{e^2} \\ &= \left[2\sqrt{e^2} (\ln(e^2) - 2) \right] - \left[2\sqrt{1} (\ln(1) - 2) \right] \\ &= [2e(2 - 2)] - [(2(-2))] \\ &= 4 \end{aligned}$$

2 [20] Use **substituição simples** para calcular a integral $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} dx$

Escolhendo a substituição

$$u = 3ax + bx^2 \quad du = (3a + 3bx^2) dx = 3(a + bx^2) dx$$

portanto

$$(a + bx^2) dx = \frac{du}{3}$$

então

$$\begin{aligned}\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3ax + bx^3}} (a + bx^2) dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{3} \frac{u^{1/2}}{1/2} + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{u} + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3ax + bx^3} + c\end{aligned}$$

3 [40] Escolha dois itens e calcule as primitivas das funções correspondentes

a) ☐ $f(x) = \cos^2(x) \sin(2x)$

b) ☐ $g(x) = \operatorname{tg}^4(x) \sec^6(x)$

c) ☐ $h(x) = \frac{x^5}{\sqrt{4 - x^2}}$

Marque sua escolha nas caixas, caso contrário, serão corrigidos dois itens aleatoriamente.

a)

$$\begin{aligned}F &= \int f(x) dx \\ &= \int \cos^2(x) \sin(2x) dx \\ &= \int \cos^2(x) 2 \sin(x) \cos(x) dx \\ &= 2 \int \cos^3(x) \sin(x) dx\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \cos(x)$ $du = -\sin(x) dx$

$$\begin{aligned}F &= -2 \int u^3 du \\ &= -2 \frac{u^4}{4} + c \\ &= -\frac{1}{2} \cos^4(x) + c\end{aligned}$$

b)

$$G = \int \operatorname{tg}^4(x) \sec^6(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \operatorname{tg}^4(x) \sec^4(x) \sec^2(x) dx \\
&= \int \operatorname{tg}^4(x) (\sec^2(x))^2 \sec^2(x) dx \\
&= \int \operatorname{tg}^4(x) (\operatorname{tg}^2(x) + 1)^2 \sec^2(x) dx
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \operatorname{tg}(x)$ $du = \sec^2(x) dx$

$$\begin{aligned}
G &= \int u^4 (u^2 + 1)^2 du \\
&= \int u^4 (u^4 + 2u^2 + 1) du \\
&= \int u^8 + 2u^6 + u^4 du \\
&= \frac{u^9}{9} + 2\frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5} + c \\
&= \frac{1}{9} \operatorname{tg}^9(x) + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^7(x) + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5(x) + c
\end{aligned}$$

c)

$$H = \int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Fazendo a substituição $x = 2 \operatorname{sen}(\theta)$ $dx = 2 \cos(\theta) d\theta$

$$\begin{aligned}
H &= \int \frac{2^5 \operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(\theta)}} 2 \cos(\theta) d\theta \\
&= 2^5 \int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta \\
&= 2^5 \int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\cos(\theta)} \cos(\theta) d\theta \\
&= 2^5 \int \operatorname{sen}^5(\theta) d\theta \\
&= 2^5 \int (\operatorname{sen}^2(\theta))^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta \\
&= 2^5 \int (1 - \cos^2(\theta))^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \cos(\theta)$ $du = -\operatorname{sen}(\theta) d\theta$

$$\begin{aligned}
H &= -2^5 \int (1 - u^2)^2 du \\
&= -2^5 \int 1 - 2u^2 + u^4 du \\
&= 2^5 \int 2u^2 - u^4 - 1 du \\
&= 2^5 \left(\frac{2}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 - u \right) + c \\
&= 2^5 \left(\frac{2}{3} \cos^3(\theta) - \frac{1}{5} \cos^5(\theta) - \cos(\theta) \right) + c
\end{aligned}$$

Para calcular $\cos(\theta)$ usamos que $\sin(\theta) = x/2$, portanto a hipotenusa é 2 e o cateto oposto é x assim o cateto adjacente é $a = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$ e o cosseno é

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

Voltando para a integral

$$\begin{aligned} H &= 2^5 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \right)^5 - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \right] + c \\ &= 2^5 \left[\frac{2}{3 \cdot 2^3} (\sqrt{4 - x^2})^3 - \frac{1}{5 \cdot 2^5} (\sqrt{4 - x^2})^5 - \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} \right] + c \\ &= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{2^3}{3} (\sqrt{4 - x^2})^2 - \frac{1}{5} (\sqrt{4 - x^2})^4 - 2^4 \right] + c \\ &= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{8}{3} (4 - x^2) - \frac{1}{5} (4 - x^2)^2 - 16 \right] + c \\ &= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{32 - 8x^2}{3} - \frac{16 - 8x^2 + x^4}{5} - 16 \right] + c \\ &= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{5 \cdot 32 - 5 \cdot 8x^2}{15} - \frac{3 \cdot 16 - 3 \cdot 8x^2 + 3x^4}{15} - \frac{16 \cdot 15}{15} \right] + c \\ &= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} [16 \cdot 5 \cdot 2 - 16 \cdot 3 - 16 \cdot 5 \cdot 3 - 5 \cdot 8x^2 + 3 \cdot 8x^2 - 3x^4] + c \\ &= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} [-16 \cdot 5 - 16 \cdot 3 - 2 \cdot 8x^2 - 3x^4] + c \\ &= -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} [16 \cdot 8 + 2 \cdot 8x^2 + 3x^4] + c \\ &= -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} [128 + 16x^2 + 3x^4] + c \end{aligned}$$

- 4 [20] Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta $x = -1$, da região contida entre as curvas

$$f(x) = \frac{1}{4x - x^2} \quad y = 0 \quad x = 1 \quad x = 3$$

Volume por castas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)dx$$

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$r = x + 1$$

$$h = \frac{1}{4x - x^2}$$

portanto

$$V = 2\pi \int_1^3 \frac{x+1}{4x-x^2} dx$$

Calculando a integral indefinida

$$F = \int \frac{x+1}{4x-x^2} dx = \int \frac{x+1}{x(4-x)} dx$$

Por frações parciais temos

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x(4-x)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{4-x} \\ x+1 &= A(4-x) + Bx \\ &= (B-A)x + 4A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes

$$\begin{cases} -A + B = 1 \\ 4A = 1 \end{cases}$$

obtemos os valores $A = \frac{1}{4}$ e $B = \frac{5}{4}$ portanto

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1}{4x} + \frac{5}{4(4-x)} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln(x) - \frac{5}{4} \ln(4-x) + c \end{aligned}$$

Voltando ao volume temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi F(x) \Big|_1^3 \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} \ln(x) - \frac{5}{4} \ln(4-x) \right] \Big|_1^3 \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{1}{4} \ln(3) - \frac{5}{4} \ln(4-3) \right) - \left(\frac{1}{4} \ln(1) - \frac{5}{4} \ln(4-1) \right) \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4} \ln(3) + \frac{5}{4} \ln(3) \right) \\ &= 2\pi \frac{6}{4} \ln(3) \\ &= 3\pi \ln(3) \end{aligned}$$