INTEGRAIS E SÉRIES – PROVA SUBSTITUTIVA – TURMA 4 14/12/2023

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

Substitui a prova ________

Os exercícios 1 e 2 valem 30 para quem perdeu a prova 1 ou 2
O exercício 3 vale 40 para quem perdeu a prova 3
O exercício 4 vale 40 para quem perdeu a prova 4

1 [20] Calcule a integral $\int_0^3 x^2 \ln(x)dx$. *Atenção ao intervalo de integração.*

Calculando a primitiva $F(x) = \int x^2 \ln(x)dx$, por integral por partes

$$u = \ln(x) \qquad dv = x^2 dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2 \ln(x)dx \\ &= \ln(x)\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\ &= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C \\ &= \frac{x^3}{3^2}(3\ln(x) - 1) + C \end{aligned}$$

Para calcular a integral definida precisamos observar que temos uma assintota vertical em $x = 0$, portanto, essa é uma integral imprópria

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 x^2 \ln(x)dx \\ &= \lim_{t\to 0} \int_t^3 x^2 \ln(x)dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0}\left[\frac{x^3}{3^2}(3\ln(x)-1)\bigg|_t^3\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\left[\frac{3^3}{3^2}(3\ln(3)-1)-\frac{t^3}{3^2}(3\ln(t)-1)\right] \\
&= 3(3\ln(3)-1)-\frac{1}{3^2}\lim_{t\to 0}\left[t^3(3\ln(t)-1)\right]
\end{aligned}
$$

Precisamos calcular o limite

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{t\to 0} t^3(3\ln(t)-1) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{3\ln(t)-1}{t^{-3}} && \text{usando l'Hopital} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{3t^{-1}}{-3t^{-4}} \\
&= \lim_{t\to 0} -t^3 = 0
\end{aligned}
$$

Portando

$$
I = \int_0^3 x^2\ln(x)dx = 3(3\ln(3)-1) = 9\ln(3)-3
$$

2 [20] Calcule o volume do sólido construído pela rotação, em torno do eixo x, da região contida entre as curvas $y = x$ e $y = x^2$

Integrando por seções transversais em x temos

$$
V = \int_a^b A(x)dx
$$

Calculando os pontos de intersecção das curvas

$$
\begin{aligned}
x &= x^2 \\
x^2 - x &= 0 \\
x(x-1) &= 0
\end{aligned}
$$

temos $x = 0$ ou $x = 1$, então $a = 0$, $b = 1$. A área da seção transversal é

$$
A(x) = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi\left(x^2 - x^4\right)
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi\left(x^2-x^4\right)dx \\
&= \pi\int_0^1 x^2 - x^4 dx
\end{aligned}
$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} \right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^5}{5} \right) \right]$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}$$

3 [20] Analise a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Usando o teste da integral com a **função real** $f(x) = xe^{-x^2}$ que é:

1. **contínua** para todo x real
2. **positiva** para $x > 0$
3. para verificar se é **decrescente** vamos calcular sua derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} xe^{-x^2} \\ &= e^{-x^2} + x\frac{d}{dx}e^{-x^2} \\ &= e^{-x^2} + xe^{-x^2}\frac{d}{dx}\left(-x^2\right) \\ &= e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) \\ &= e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) \end{aligned}$$

A função será decrescente para

$$\begin{aligned} 1 - 2x^2 &< 0 \\ x^2 &> \frac{1}{2} \\ x &> \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7 \end{aligned}$$

Temos então que a série converge, se e somente, se a integral

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx$$

converge. Calculando a primitiva por substituição simples

$$u = -x^2 \qquad du = -2xdx \qquad dx = \frac{du}{-2x}$$

temos

$$F(x) = \int xe^{-x^2} dx$$

$$= \int xe^u \frac{du}{-2x}$$

$$= \frac{-1}{2}\int e^u du$$

$$= \frac{-e^u}{2} + C$$

$$= \frac{-e^{-x^2}}{2} + C$$

Calculando a integral imprópria

$$I = \int_1^\infty xe^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^b xe^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-e^{-x^2}}{2}\right)\Bigg|_1^b$$

$$= \frac{-1}{2}\lim_{b\to\infty} \left(e^{-x^2}\right)\Big|_1^b$$

$$= \frac{-1}{2}\lim_{b\to\infty} \left(e^{-b^2} - e^{-1^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\lim_{b\to\infty} \left(e^{-b^2}\right) - e^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2e} \in \mathbb{R}$$

Como a integral converge a série também converge.

4 [20] Sabendo que $f^{(n)}(x) = 2^x \ln(2)^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) Construa a Série de Taylor de f centrada em zero

b) Mostre que a Série de Taylor de f converge para f em $[0, 10]$

a) A Série de Taylor para essa função é

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \ln(2)^n}{n!} x^n$$

b) Para provarmos que a Série de Taylor converge para a função devemos mostrar que $R_n(x) \to 0$.
Pelo Teorema de Taylor temos

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

com ξ entre zero e x, em nosso caso

$$R_n(x) = \frac{2^\xi \ln(2)^n}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!} \, 2^\xi \, x^{n+1}$$

Portanto

$$|R_n(x)| = \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!} \, 2^\xi \, |x|^{n+1}$$

Como $0 \le \xi \le x \le 10$ temos

$$2^\xi \le 2^{10} \qquad \text{e} \qquad |x|^{n+1} = x^{n+1} \le 10^{n+1}$$

Assim

$$|R_n(x)| \le \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!} \, 2^{10} \, 10^{n+1} = 10 \cdot 2^{10} \, \frac{\ln(2)^n \, 10^n}{(n+1)!} = 10 \cdot 2^{10} \, \frac{\big(10 \ln(2)\big)^n}{(n+1)!}$$

como

$$\lim_{n \to \infty} 10 \cdot 2^{10} \, \frac{\big(10 \ln(2)\big)^n}{(n+1)!} = 0$$

o Teorema do Confronto garante que $R_n(x) \to 0$ e portanto a Série de Taylor converge para a função.