

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20] Use substituição simples para calcular a integral $\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx$

Queremos calcular

$$F = \int \cos(x)e^{\sin(x)}dx$$

Faremos a substituição

$$u = \sin(x) \quad du = \cos(x)dx$$

Assim

$$\begin{aligned} F &= \int e^{\sin(x)} \cos(x)dx \\ &= \int e^u du \\ &= e^u + C \\ &= e^{\sin(x)} + C \end{aligned}$$

2 [20] Use integração por partes para calcular a integral $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

Queremos calcular

$$I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

Primeiro vamos encontrar a primitiva

$$F = \int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

Usamos

$$u = \ln(x) \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x^2} dx \quad v = \frac{-1}{x}$$

Assim

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^2} \ln(x) dx \\ &= -\ln(x) \frac{1}{x} - \int \frac{-1}{x} \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \int x^{-2} dx \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{x^{-1}}{-1} + C \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

Agora podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx \\ &= F(x) \Big|_1^e \\ &= F(e) - F(1) \\ &= \left(-\frac{\ln(e)}{e} - \frac{1}{e} + C \right) - \left(-\frac{\ln(1)}{1} - \frac{1}{1} + C \right) \\ &= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + \frac{0}{1} + \frac{1}{1} \\ &= -\frac{2}{e} + 1 \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

3 [20] Calcule a integral $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

$$F = \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$x = 3 \operatorname{sen}(\theta) \quad dx = 3 \cos(\theta) d\theta$$

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{9-(3 \operatorname{sen}(\theta))^2}} 3 \cos(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{3 \cos(\theta)}{\sqrt{9-9 \operatorname{sen}^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int \frac{3 \cos(\theta)}{\sqrt{9} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int \frac{3 \cos(\theta)}{3 \sqrt{\cos^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)} d\theta \\ &= \int d\theta \\ &= \theta + C \\ &= \operatorname{arcsen}(x) + C \end{aligned}$$

4 [20] Calcule a integral $\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$

$$F = \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$$

Vamos aplicar frações parciais, para isso precisamos das raízes de $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

Uma das raízes de Q é zero, $x_1 = 0$, usamos Bhaskara para encontrar as demais

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_3 = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Podemos fatorar Q

$$Q(x) = x(x - 3)(x + 1)$$

Usando frações parciais

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 1}$$

Multiplicando os dois lados por $x(x - 3)(x + 1)$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 3 &= A(x - 3)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 3) \\ &= A(x^2 + x - 3x - 3) + B(x^2 + x) + C(x^2 - 3x) \\ &= Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 3Cx \\ &= (A + B + C)x^2 + (-2A + B - 3C)x - 3A \end{aligned}$$

Igualando os polinômios construímos o sistema linear

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ -2A + B - 3C = -3 \\ -3A = 3 \end{cases}$$

Verificamos que $A = -1$ e reduzimos o sistema para

$$\begin{cases} B + C = 3 \\ B - 3C = -5 \end{cases}$$

Isolando B na primeira equação temos $B = 3 - C$, substituindo na segunda temos

$$B - 3C = -5$$

$$(3 - C) - 3C = -5$$

$$3 - C - 3C = -5$$

$$-4C = -8$$

$$C = 2$$

portanto $B = 1$, temos então que

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3} + \frac{2}{x + 1}$$

então

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx &= -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x - 3} dx + 2 \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= -\ln|x| + \ln|x - 3| + 2\ln|x + 1| + C \\ &= \ln|x - 3| - \ln|x| + 2\ln|x + 1| + C\end{aligned}$$

5 [20] Calcule a limite da sequência $a_k = \frac{1 - 2k}{1 + 2k}$

$$\begin{aligned}\lim a_k &= \lim \frac{1 - 2k}{1 + 2k} \\&= \lim \frac{(1 - 2k)^{1/k}}{(1 + 2k)^{1/k}} \\&= \lim \frac{1/k - 2}{1/k + 2} \\&= \frac{\lim 1/k - \lim 2}{\lim 1/k + \lim 2} \\&= \frac{0 - 2}{0 + 2} \\&= -1\end{aligned}$$