

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [25] Determine se a série $\sum_{n=1} \frac{n-2}{n^3 - n^2 + 3}$ converge ou diverge. Explícite o teste usado.

Vamos usar o teste da comparação no limite, comparando com a série

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$$

que é uma série convergente pois é uma série p com $p = 2 > 1$.

Calculando o limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n^3 - n^2 + 3} \left(\frac{1}{n^2} \right)^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)n^2}{n^3 - n^2 + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2}{n^3 - n^2 + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2/n}{1 - 1/n + 3/n^3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como o $L = 1 > 0$ a série $\sum_{n=1} \frac{n-2}{n^3 - n^2 + 3}$ converge.

2 [25] Determine o interior do intervalo onde a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$ converge.

Vamos aplicar o teste da razão (seria possível aplicar o teste da raiz também).

O termo geral da série é

$$u_n = \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$$

seu sucessor é

$$u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (x+2)^{n+1}}{n+1}$$

Calculando o quociente dos módulos

$$\begin{aligned} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \left| \frac{(-1)^{n+1} (x+2)^{n+1}}{n+1} \right| \left| \frac{n}{(-1)^n (x+2)^n} \right| \\ &= \frac{|x+2|^{n+1}}{n+1} \frac{n}{|x+2|^n} \\ &= \frac{|x+2|n}{n+1} \end{aligned}$$

Calculando o limite

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+2|n}{n+1} = |x+2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x+2|$$

A condição de convergência do teste da razão é $\rho < 1$ portanto

$$\begin{aligned} \rho &< 1 \\ |x+2| &< 1 \\ -1 &< x+2 < 1 \\ -1-2 &< x < 1-2 \\ -3 &< x < -1 \end{aligned}$$

A série converge absolutamente no intervalo $(-3, -1)$.

3 [25] Calcule a integral indefinida da função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{2^n (2n)!}$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{2^n (2n)!} \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{(n!)^2 x^n}{2^n (2n)!} dx \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n (2n)!} \int x^n dx \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n (2n)!} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^{n+1}}{2^n (n+1)(2n)!} \end{aligned}$$

4 [25] Encontre a Série de Taylor, centrada em 2, da função $f(x) = e^x$

Calculando as derivadas de $f(x) = e^x$ temos

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

Avaliando em $x = 2$ temos

$$f^{(n)}(2) = e^2$$

O coeficiente da Série de Taylos será

$$c_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{e^2}{n!}$$

A Série de Taylor é

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x - 2)^n$$