

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20] Calcule o valor médio da função $f(x) = x^2 \ln(x)$ no intervalo $[1, 3]$

Calculando a primitiva de f usando integral por partes $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int x^2 \ln(x) dx \end{aligned}$$

$$u = \ln(x) \quad du = \frac{dx}{x} \quad dv = x^2 dx \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C \\ &= \frac{x^3}{3} \left(\ln(x) - \frac{1}{3} \right) + C \end{aligned}$$

Calculando a integral definida de f no intervalo $[1, 3]$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 f(x) dx \\ &= F(x) \Big|_1^3 \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \left(\ln(x) - \frac{1}{3} \right) \right] \Big|_1^3 \\ &= \frac{3^3}{3} \left(\ln(3) - \frac{1}{3} \right) - \frac{1^3}{3} \left(\ln(1) - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 9 \left(\ln(3) - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \left(0 - \frac{1}{3} \right) \\
&= 9 \ln(3) - 3 + \frac{1}{9} \\
&= 9 \ln(3) - \frac{27}{9} + \frac{1}{9} \\
&= 9 \ln(3) - \frac{26}{9}
\end{aligned}$$

Calculando a média

$$\begin{aligned}
f_{\text{médio}} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\
&= \frac{1}{3-1} \int_1^3 x^2 \ln(x) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(9 \ln(3) - \frac{26}{9} \right) \\
&= \frac{9}{2} \ln(3) - \frac{13}{9} \\
&\approx 3,4993
\end{aligned}$$

2 [20] Use substituição simples para calcular a integral $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$

Calculando a primitiva usando substituição simples

$$F = \int x e^{-x^2} dx$$

$$u = -x^2 \quad du = -2x dx \quad x dx = \frac{du}{-2}$$

$$\begin{aligned} F &= \int e^u \frac{du}{-2} \\ &= -\frac{1}{2} \int e^u du \\ &= -\frac{1}{2} e^u + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

Calculando a integral imprópria

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty x e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(F(x) \Big|_0^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-x^2}}{2} \Big|_0^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-b^2}}{2} + \frac{e^{-0^2}}{2} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-b^2}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{-b^2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3 [20] Encontre a primitiva da função $f(x) = \cos^5(x) \operatorname{sen}^2(x)$

$$\begin{aligned} F &= \int f(x) dx \\ &= \int \cos^5(x) \operatorname{sen}^2(x) dx \\ &= \int (\cos^2(x))^2 \operatorname{sen}^2(x) \cos(x) dx \\ &= \int (1 - \operatorname{sen}^2(x))^2 \operatorname{sen}^2(x) \cos(x) dx \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \operatorname{sen}(x)$ $du = \cos(x) dx$

$$\begin{aligned} F &= \int (1 - u^2)^2 u^2 du \\ &= \int (1 - 2u^2 + u^4) u^2 du \\ &= \int u^2 - 2u^4 + u^6 du \\ &= \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + c \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5(x) + \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7(x) + c \end{aligned}$$

4 [20] Encontre a primitiva da função $h(x) = \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}$

$$H = \int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Fazendo a substituição $x = 2 \operatorname{sen}(\theta)$ $dx = 2 \cos(\theta) d\theta$

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{2^5 \operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(\theta)}} 2 \cos(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\cos(\theta)} \cos(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int \operatorname{sen}^5(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int (\operatorname{sen}^2(\theta))^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int (1 - \cos^2(\theta))^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \cos(\theta)$ $du = -\operatorname{sen}(\theta) d\theta$

$$\begin{aligned} H &= -2^5 \int (1-u^2)^2 du \\ &= -2^5 \int 1 - 2u^2 + u^4 du \\ &= 2^5 \int 2u^2 - u^4 - 1 du \\ &= 2^5 \left(\frac{2}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 - u \right) + c \\ &= 2^5 \left(\frac{2}{3} \cos^3(\theta) - \frac{1}{5} \cos^5(\theta) - \cos(\theta) \right) + c \end{aligned}$$

Para calcular $\cos(\theta)$ usamos que $\operatorname{sen}(\theta) = x/2$, portanto a hipotenusa é 2 e o cateto oposto é x assim o cateto adjacente é $a = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$ e o cosseno é

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Voltando para a integral

$$\begin{aligned} H &= 2^5 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right)^5 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right] + c \\ &= 2^5 \left[\frac{2}{3 \cdot 2^3} (\sqrt{4-x^2})^3 - \frac{1}{5 \cdot 2^5} (\sqrt{4-x^2})^5 - \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} \right] + c \\ &= \sqrt{4-x^2} \left[\frac{2^3}{3} (\sqrt{4-x^2})^2 - \frac{1}{5} (\sqrt{4-x^2})^4 - 2^4 \right] + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4-x^2} \left[\frac{8}{3} (4-x^2) - \frac{1}{5} (4-x^2)^2 - 16 \right] + c \\
&= \sqrt{4-x^2} \left[\frac{32-8x^2}{3} - \frac{16-8x^2+x^4}{5} - 16 \right] + c \\
&= \sqrt{4-x^2} \left[\frac{5 \cdot 32 - 5 \cdot 8x^2}{15} - \frac{3 \cdot 16 - 3 \cdot 8x^2 + 3x^4}{15} - \frac{16 \cdot 15}{15} \right] + c \\
&= \frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[16 \cdot 5 \cdot 2 - 16 \cdot 3 - 16 \cdot 5 \cdot 3 - 5 \cdot 8x^2 + 3 \cdot 8x^2 - 3x^4 \right] + c \\
&= \frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[-16 \cdot 5 - 16 \cdot 3 - 2 \cdot 8x^2 - 3x^4 \right] + c \\
&= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[16 \cdot 8 + 2 \cdot 8x^2 + 3x^4 \right] + c \\
&= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[128 + 16x^2 + 3x^4 \right] + c
\end{aligned}$$

5 [20] Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta $x = -2$, da região contida entre as curvas

$$f(x) = \frac{1}{5x - x^2} \quad y = 0 \quad x = 1 \quad x = 4$$

Volume por castas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)dx$$

$$a = 1$$

$$b = 4$$

$$r = x + 2$$

$$h = \frac{1}{5x - x^2}$$

portanto

$$V = 2\pi \int_1^4 \frac{x+2}{5x-x^2} dx$$

Calculando a integral indefinida

$$F = \int \frac{x+2}{5x-x^2} dx = \int \frac{x+2}{x(5-x)} dx$$

Por frações parciais temos

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x(5-x)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{5-x} \\ x+2 &= A(5-x) + Bx \\ &= (B-A)x + 5A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes

$$\begin{cases} -A + B = 1 \\ 5A = 2 \end{cases}$$

obtemos os valores $A = \frac{2}{5}$ e $B = \frac{7}{5}$ portanto

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{2}{5x} + \frac{7}{5(5-x)} dx \\ &= \frac{2}{5} \ln(x) - \frac{7}{5} \ln(5-x) + c \end{aligned}$$

Voltando ao volume temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi F(x) \Big|_1^4 \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{5} \ln(x) - \frac{7}{5} \ln(5-x) \right] \Big|_1^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \left[\left(\frac{2}{5} \ln(4) - \frac{7}{5} \ln(5-4) \right) - \left(\frac{2}{5} \ln(1) - \frac{7}{5} \ln(5-1) \right) \right] \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{5} \ln(4) + \frac{7}{5} \ln(4) \right) \\
&= 2\pi \frac{9}{5} \ln(4) \\
&= \frac{18\pi}{5} \ln(4)
\end{aligned}$$