Integração e Séries – Prova 1 – Turma 3 01/04/2026

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas, escreva ao menos uma passagem!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [40%] Calcule as integrais

a) [20%] $\displaystyle\int a(3x-1)^4 - \frac{1}{cx} + \sqrt{x} + 7\,dx$

b) [20%] $\displaystyle\int_0^x x\,\mathrm{sen}(\pi t)\,dt$

a) Esta é uma integral indefinida, isto é, ela é a função que quando derivada retorna o integrando

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int a(3x-1)^4 - \frac{1}{cx} + \sqrt{x} + 7\,dx \\
&= a\int (3x-1)^4\,dx - \frac{1}{c}\int \frac{1}{x}\,dx + \int \sqrt{x}\,dx + 7\int dx \\
&= a\int (3x-1)^4\,dx - \frac{1}{c}\int x^{-1}\,dx + \int x^{1/2}\,dx + 7\int x^0\,dx \\
&= a\frac{(3x-1)^{4+1}}{3(4+1)} - \frac{1}{c}\ln|x| + \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + 7\frac{x^{0+1}}{0+1} + k \\
&= \frac{a}{15}(3x-1)^5 - \frac{1}{c}\ln|x| + \frac{x^{3/2}}{3/2} + 7x + k \\
&= \frac{a}{15}(3x-1)^5 - \frac{1}{c}\ln|x| + \frac{2x^{3/2}}{3} + 7x + k
\end{aligned}$$

b) Esta é uma integral definida então ela é um número real. Como vamos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para avaliar a integral precisamos encontrar a primitiva primeiro.

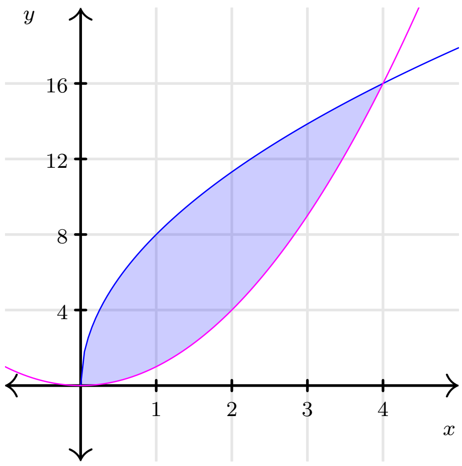
Atenção: note que a integral é em t, portanto x é uma **constante**!

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int x\,\mathrm{sen}(\pi t)\,dt \\
&= x\int \mathrm{sen}(\pi t)\,dt \\
&= x\left(\frac{-\cos(\pi t)}{\pi}\right) + c \\
&= -\frac{x}{\pi}\cos(\pi t) + c
\end{aligned}$$

Avaliando a integral definida

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^x x\,\mathrm{sen}(\pi t)\,dt \\
&= F(t)\Big|_0^x = F(x) - F(0) \\
&= \left(-\frac{x}{\pi}\cos(\pi t) + c\right)\Big|_0^x \\
&= \left(-\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + c\right) - \left(-\frac{x}{\pi}\cos(\pi 0) + c\right) \\
&= -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{x}{\pi} \\
&= \frac{x}{\pi}\left(1 - \cos(\pi x)\right)
\end{aligned}$$

2 [30%] Calcule a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = 8\sqrt{x}$



Intersecção entre as curvas

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 8\sqrt{x} \\
x^4 &= \left(8\sqrt{x}\right)^2 \\
x^4 &= 8^2 x \\
x^4 - 8^2 x &= 0 \\
x\left(x^3 - 8^2\right) &= 0
\end{aligned}
$$

portanto $x = 0$ ou

$$
\begin{aligned}
x^3 - 8^2 &= 0 \\
x^3 &= 8^2 = 2^{3\times 2} \\
x &= 2^2 = 4
\end{aligned}
$$

Assim as intersecções ocorrem em $x = 0$ e $x = 4$
Como no intervalo $[0, 4]$ ambas as funções são contínuas e $x^2 \leq 8\sqrt{x}$ a área é dada pela integral

$$A = \int_0^4 8\sqrt{x} - x^2 \, dx$$

Calculando a primitiva

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int 8\sqrt{x} - x^2 \, dx \\
&= 8\int x^{1/2}\, dx - \int x^2 \, dx \\
&= 8\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1} + c \\
&= 8\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} + c \\
&= 16\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} + c \\
&= \frac{16x^{3/2} - x^3}{3} + c
\end{aligned}
$$

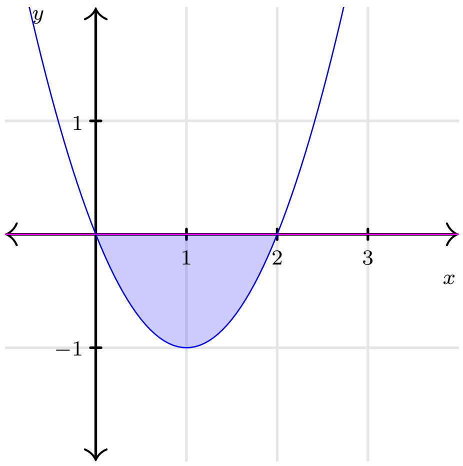
Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, podemos calcular a área

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^4 8\sqrt{x} - x^2 \, dx \\
&= F(x)\Big|_0^4 \\
&F(4) - F(0) \\
&= \left(\frac{16\times 4^{3/2} - 4^3}{3}\right) - \left(\frac{16\times 0^{3/2} - 0^3}{3}\right) \\
&= \frac{16\times 8 - 64}{3} \\
&= \frac{128 - 64}{3} \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

3 [30%] Considere a região do plano, R, entre as curvas $y = x(x-2)$ e $y = 0$. Escreva formulas integrais para os sólidos de revolução construídos:

a) [15%] pela rotação da região R em torno do eixo y

b) [15%] pela rotação da região R em torno do eixo x



A intersecção entre as curvas ocorre quando

$$x(x-2) = 0$$

ou seja, quando $x = 0$ e $x = 2$. Assim os intervalos de integração serão

$$a = 0 \qquad \text{e} \qquad b = 2$$

No intervalo $[0, 2]$ as funções são contínuas e

$$x(x-2) \leq 0$$

portanto a "altura" entre as curvas é

$$g(x) = 0 - x(x-2) = 2x - x^2$$

a) Para calcularmos o volume do sólido de revolução criado pela rotação em torno do eixo y usamos cascas cilíndricas. Neste caso o raio e a altura da casca cilíndrica são

$$r(x) = x \qquad h(x) = g(x) = 2x - x^2$$

Portanto o volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi r(x)h(x)\,dx \\ &= \int_0^2 2\pi x\left(2x - x^2\right)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^2 2x^2 - x^3\,dx \end{aligned}$$

b) Para calcularmos o volume do sólido de revolução criado pela rotação em torno do eixo x usamos seções transversais. A área da seção transversão é

$$A(x) = \pi r^2(x) = \pi g^2(x) = \pi\left(2x - x^2\right)^2$$

Assim o volume é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx \\ &= \int_0^2 \pi\left(2x - x^2\right)^2\,dx \\ &= \pi \int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2\,dx \end{aligned}$$