INTEGRAÇÃO E SÉRIES – PROVA 2 – TURMA 3

27/04/2026

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

Calcule as integrais solicitadas, apresentando todos os passos necessários.

1 [25%] $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

Utilizamos a substituição trigonométrica

$$x = 3\operatorname{sen}\theta \qquad dx = 3\cos\theta\,d\theta$$

temos

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta} = 3\cos\theta$$

Substituindo na integral

$$\begin{aligned} F &= \int \sqrt{9-x^2}\,dx \\ &= \int (3\cos\theta)(3\cos\theta)\,d\theta \\ &= 9\int \cos^2\theta\,d\theta \end{aligned}$$

Usamos a identidade

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

temos

$$\begin{aligned} F &= \frac{9}{2}\int 1+\cos 2\theta\,d\theta \\ &= \frac{9}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) + C \end{aligned}$$

Voltando para x temos

$$\begin{aligned} \theta &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) \\ \operatorname{sen} 2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= 2\,\frac{x}{3}\,\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \\ &= \frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{9}{2}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2}\right) + C \\ &= \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C \end{aligned}$$

2 [25%] $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

Trata-se de uma integral imprópria com domínio infinito, portanto precisamos explicitar o limite

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx \end{aligned}$$

Primeiro vamos calcular a primitiva

$$F(x) = \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

usando a substituição

$$u = 1+e^x \qquad\qquad du = e^x dx$$

temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{u^2}\,du \\ &= \int u^{-2}\,du \\ &= \frac{u^{-1}}{-1} + C \\ &= \frac{-1}{u} + C \\ &= \frac{-1}{1+e^x} + C \end{aligned}$$

Calculamos agora a integral definida no intervalo $[0, b]$

$$\begin{aligned} I(b) &= \int_0^{b} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx \\ &= F(x)\Big|_0^b \\ &= \frac{-1}{1+e^x}\Big|_0^b \\ &= \frac{-1}{1+e^b} - \frac{-1}{1+e^0} \\ &= \frac{-1}{1+e^b} + \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1+e^b} \end{aligned}$$

Agora calculamos o limite

$$\begin{aligned} A &= \lim_{b\to\infty} I(b) \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+e^b}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3 [25%] $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^x\,dx$

Queremos calcular

$$A = \int_{-1}^{1} xe^x\,dx$$

Usamos integração por partes e escolhemos

$$u = x \qquad\qquad dv = e^x dx$$

obtermos assim

$$du = dx \qquad\qquad v = e^x$$

Calculando a primitiva

$$\begin{aligned} F(x) &= \int xe^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$

Calculando a integral definida

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 xe^x dx \\ &= F(x)\Big|_{-1}^{1} \\ &= (xe^x - e^x)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \left(1e^1 - e^1\right) - \left(-1e^{-1} - e^{-1}\right) \\ &= e - e + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \\ &= \frac{2}{e} \end{aligned}$$

4 [25%] $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$

Queremos calcular a integral indefinida

$$F(x) = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$$

Como temos uma potência ímpar no seno, realizamos a transformação

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^3 x &= \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \\ &= \left(1 - \cos^2 x\right) \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx \\ &= \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx \end{aligned}$$

Usando a substituição

$$u = \cos x \qquad du = -\operatorname{sen} x dx$$

temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(1 - u^2\right) u^2 (-du) \\ &= \int u^4 - u^2 du \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$