Integração e Séries – Prova 3 – Turma 3

13/05/2026

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [50%] Calcule $F(x) = \int \frac{2x^2+5x+1}{(x^2+x-2)(x+3)}\,dx$

Para fatorar o polinômio no denominador

$$Q(x) = (x^2+x-2)(x+3)$$

precisamos encontrar as raízes de

$$h(x) = x^2+x-2$$

portanto

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 1 \times (-2) = 9 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

raízes

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1\pm 3}{2\times 1} = \frac{-1\pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Assim

$$Q(x) = (x-1)(x+2)(x+3)$$

Por frações parciais

$$\frac{2x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Multiplicando ambos os lados por $(x-1)(x+2)(x+3)$,

$$\begin{aligned} 2x^2+5x+1 &= A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2) \\ &= A(x^2+5x+6) + B(x^2+2x-3) + C(x^2+x-2) \\ &= (A+B+C)x^2 + (5A+2B+C)x + (6A-3B-2C) \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes,

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ 5A + 2B + C = 5 \\ 6A - 3B - 2C = 1 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda

$$\begin{aligned} 4A + B &= 3 \\ B &= 3 - 4A \end{aligned}$$

Substituindo $B = 3 - 4A$ na primeira equação

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ C &= 2 - A - B \\ &= 2 - A - (3 - 4A) \\ &= 3A - 1 \end{aligned}$$

Substituindo na terceira equação

$$\begin{aligned} 6A - 3B - 2C &= 1 \\ 6A - 3(3 - 4A) - 2(3A - 1) &= 1 \\ 6A - 9 + 12A - 6A + 2 &= 1 \\ 12A - 7 &= 1 \\ 12A &= 8 \\ A &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Logo,

$$B = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad C = 3\,\frac{2}{3} - 1 = 1$$

Portanto,

$$\frac{2x^2 + 5x + 1}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{x+3}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{2x^2 + 5x + 1}{(x^2 + x - 2)(x+3)}\, dx \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{x+3} \\ &= \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + \ln|x+3| + c \end{aligned}$$

2 [50%] Calcule os limites das sequências $a_n = \dfrac{3n^2 - 5n + 1}{2n^2 + n - 4}$ e $b_n = \dfrac{(n+1)!}{n!\,(2n+1)}$

a)

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} a_n \\
&= \lim \frac{3n^2 - 5n + 1}{2n^2 + n - 4} \\
&= \lim \frac{3 - {}^5\!/\!{}_n + {}^1\!/\!{}_{n^2}}{2 + {}^1\!/\!{}_n - {}^4\!/\!{}_{n^2}} \\
&= \frac{\lim\,(3 - {}^5\!/\!{}_n + {}^1\!/\!{}_{n^2})}{\lim\,(2 + {}^1\!/\!{}_n - {}^4\!/\!{}_{n^2})} \\
&= \frac{3 - \lim {}^5\!/\!{}_n + \lim {}^1\!/\!{}_{n^2}}{2 + \lim {}^1\!/\!{}_n - \lim {}^4\!/\!{}_{n^2}} \\
&= \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0 - 0} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
B &= \lim_{n\to\infty} b_n \\
&= \lim \frac{(n+1)!}{n!\,(2n+1)} \\
&= \lim \frac{(n+1)\,n!}{n!\,(2n+1)} \\
&= \lim \frac{n+1}{2n+1} \\
&= \lim \frac{1 + {}^1\!/\!{}_n}{2 + {}^1\!/\!{}_n} \\
&= \frac{\lim\,(1 + {}^1\!/\!{}_n)}{\lim\,(2 + {}^1\!/\!{}_n)} \\
&= \frac{1 + \lim {}^1\!/\!{}_n}{2 + \lim {}^1\!/\!{}_n} \\
&= \frac{1 + 0}{2 + 0} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$