INTEGRAÇÃO E SÉRIES – PROVA 3 – TURMA 3 08/06/2026

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel e não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens, escreva ao menos uma, e use a notação matemática correta!
6. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25%] Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$

Esta é uma série geométrica

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Como $a = \dfrac{3}{2}$, $r = \dfrac{1}{2}$ e $|r| < 1$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{3/2}{1-1/2} = \frac{3}{2\,\dfrac{2-1}{2}} = \frac{3}{2\,\dfrac{1}{2}} = 3$$

2 [25%] Calcule o limite da sequência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}$

A soma parcial de ordem N é

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}$$

Escrevendo os primeiros termos,

$$S_N = \left(2 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{2N-1} - \frac{2}{2N+1}\right)$$

notamos que

$$S_N = 2 - \frac{2}{2N+1}$$

portanto

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left(2 - \frac{2}{2N+1}\right) = 2 - \lim_{N\to\infty} \frac{2}{2N+1} = 2 - 0 = 2$$

3 [25%] Utilize o teste da integral para verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^3$
Verifique todas as condições do teste

Escolhemos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, pois

$$a_n = f(n) = \frac{1}{n^3} = \left(\frac{1}{n}\right)^3$$

Para $x \in [1, \infty)$ a **função** $f(x)$ é decrescente, contínua e positiva.
Calculando a integral imprópria

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^{-3}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\left.\frac{x^{1-3}}{1-3}\right|_1^b\right] \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{b^{-2}}{-2} - \frac{b^0}{-2}\right] \\
&= 0 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Pelo **teste da integral**, como a integral imprópria converge a série também converge

4 [25%] Verifique a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

Solução 1: pelo teste da razão

Como

$$a_n = \frac{n!}{3^n}$$

temos

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$$

Como $a_n > 0$ para todo n, podemos aplicar o teste da razão

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{(n+1)\, n!\, 3^n}{3 \cdot 3^n\, n!} = \frac{n+1}{3}$$

Calculando ρ

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = \infty$$

O **teste da razão** garante que a série diverge

Solução 2: pelo teste da divergência

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 3\cdot 3\cdots 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3}\frac{n-1}{3}\frac{n-2}{3}\cdots\frac{4}{3}\frac{3}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\right) = \infty$$

Portanto a série é divergente pelo **teste da divergência**