

# Teorema do Valor Médio para Integrais

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

# Conteúdo

Recapitulando

Teorema do Valor Médio para Integrais

Demonstração

Lista Mínima

# Derivadas e Integrais

## Derivada

Taxa de variação de  $f$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

## Integral indefinida

Antiderivada de  $f$

$$F(x) = \int f(x) dx \quad \text{se} \quad \frac{dF}{dx} = f(x)$$

## Integral definida

Diferença de áreas sob o gráfico de  $f$

$$\text{“Área”} = \int_a^b f(x) dx$$

# Conteúdo

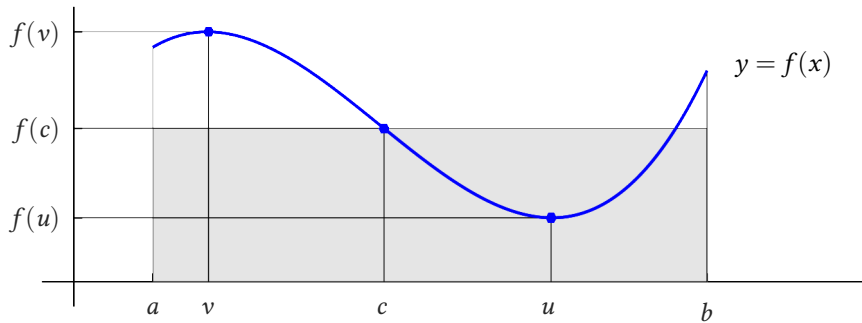
Recapitulando

Teorema do Valor Médio para Integrais

Demonstração

Lista Mínima

# Valor Médio



# Valor Médio

Denotamos o **Valor Médio** de  $f$  em  $[a, b]$  por  $f_{\text{médio}} \in \mathbb{R}$

$f_{\text{médio}}$  é valor tal que

$$f_{\text{médio}}(b - a) = \int_a^b f(x) dx$$

O Teorema do Valor Médio garante que

$f_{\text{médio}}$  sempre é o valor de  $f$  para algum ponto em  $[a, b]$

# Teorema do Valor Médio para Integrais

Seja  $f$  uma função **contínua** em  $[a, b]$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x) dx$$

ou

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

# Conteúdo

Recapitulando

Teorema do Valor Médio para Integrais

**Demonstração**

Lista Mínima

# Demonstração

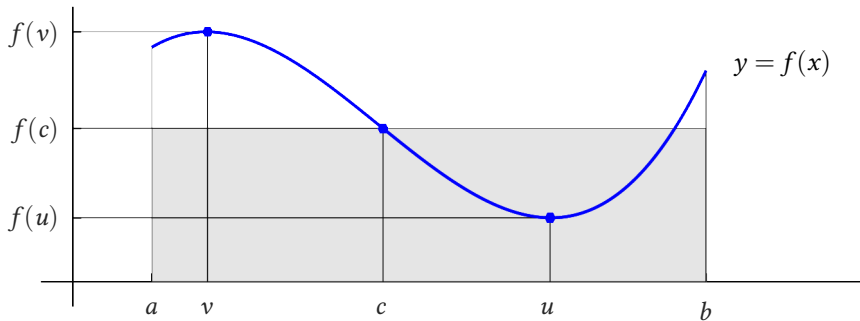
Queremos mostrar que existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

# Demonstração

## Teorema de Weierstrass

$f$  é **contínua** em  $[a, b]$  então existe um **mínimo**  $f(u)$  e um **máximo**  $f(v)$



# Demonstração

Como a integral **preserva a desigualdade**

$$\int_a^b f(u) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b f(v) \, dx$$

$$f(u)(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq f(v)(b-a)$$

$$f(u) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq f(v)$$

# Demonstração

Valor médio

$$f_{\text{médio}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$f(u) \leq f_{\text{médio}} \leq f(v)$$

Teorema do Valor Intermediário

$f$  precisa assumir o valor  $f_{\text{médio}}$  em algum  $c \in [a, b]$

# Conteúdo

Recapitulando

Teorema do Valor Médio para Integrais

Demonstração

Lista Mínima

# Lista Mínima

Estudar a Seção 2.5 da Apostila

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações