

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Demonstração

Exemplos

Lista Mínima

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Se f for **contínua** em $[a, b]$, então a função F definida por

$$F(\mathbf{x}) = \int_a^{\mathbf{x}} f(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

Em outras palavras

Se

$$F(\mathbf{x}) = \int_a^{\mathbf{x}} f(t) dt$$

então

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} \left[\int_a^{\mathbf{x}} f(t) dt \right] = f(\mathbf{x})$$

Conteúdo

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Demonstração

Exemplos

Lista Mínima

Demonstração

Queremos mostrar que, se

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

então

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

Demonstração

Sejam x e $x + h$ em (a, b)

$$\begin{aligned} F(x + h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \\ &= \int_a^x f(t) \, dt + \int_x^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) \, dt \end{aligned}$$

Demonstração

Dividindo por $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

No limite $h \rightarrow 0$

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Falta mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \stackrel{?}{=} f(x)$$

Demonstração

Pelo Teorema Valor Médio, existe $c \in [x, x + h]$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)h$$

portanto

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)$$

Quando $h \rightarrow 0$, necessariamente $c \rightarrow x$, assim

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x)$$

Conteúdo

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Demonstração

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcule a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$

Exemplo 1 – Solução

Sendo

$$f(t) = \sqrt{1 + t^2}$$

continua em todo o conjunto dos números reais

Pela parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

Conteúdo

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Demonstração

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.5 da Apostila

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações