

Áreas entre Curvas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Áreas entre Curvas

Exemplos

Exemplo – 1

Exemplo – 2

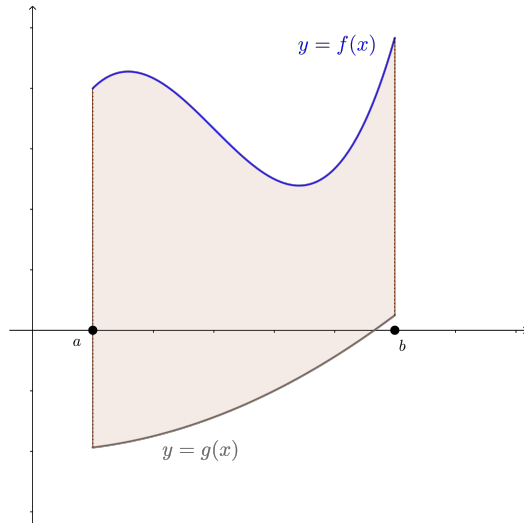
Exemplo – 3

Exemplo – 4

Exemplo – 5

Lista Mínima

Área entre Curvas



Definição: Área entre Curvas

A área da região limitada pelas curvas e retas

$$y = f(x) \quad y = g(x) \quad x = a \quad x = b$$

onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, é

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Passo a Passo

1. Identificar a região
2. Dividir a região se necessário
3. Identificar qual é a função maior em cada parte da região
4. Montar a integral definida que representa a área de cada parte
5. Calcular as integrais definidas
6. Somar os resultados

Conteúdo

Áreas entre Curvas

Exemplos

Exemplo – 1

Exemplo – 2

Exemplo – 3

Exemplo – 4

Exemplo – 5

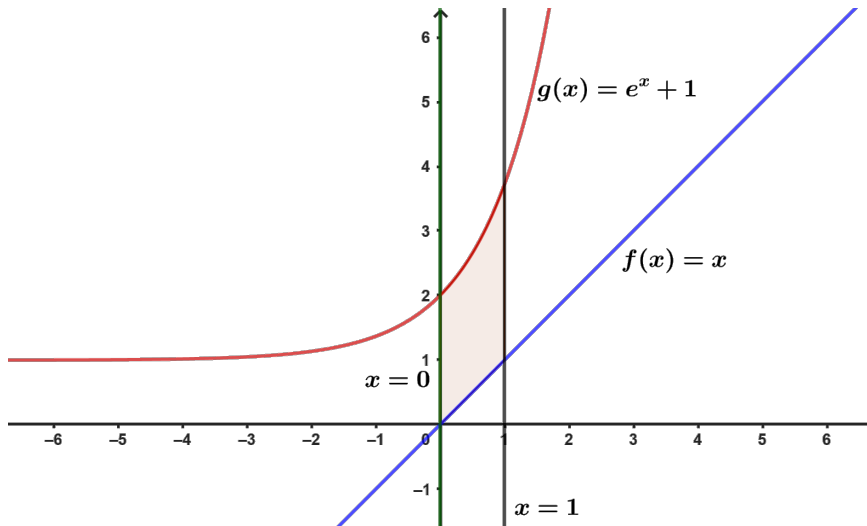
Lista Mínima

Exemplo – 1

Exemplo 1

Encontre a área da região limitada abaixo por $f(x) = x$,
acima por $g(x) = e^x + 1$ e nos lados pelas retas $x = 0$ e $x = 1$

Exemplo 1 – Interpretação



Exemplo 1 – Resolução

$$A = \int_0^1 g(x) - f(x) dx$$

$$= \int_0^1 e^x + 1 - x dx$$

$$= \left(e^x + x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

TFC 2

$$= \left(e + 1 - \frac{1}{2} \right) - \left(e^0 + 0 - \frac{0}{2} \right)$$

$$= e - \frac{1}{2}$$

Exemplo – 2

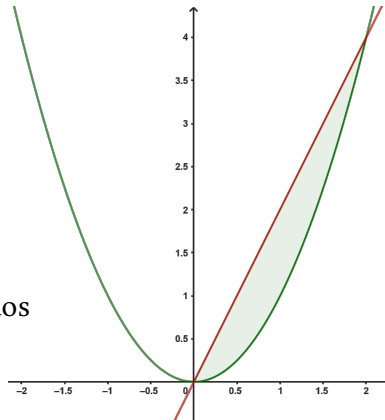
Exemplo 2

Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x$

Exemplo 2 – Interpretação

Observe que:

- ▶ a curva $y = x^2$ é uma parábola
- ▶ a curva $y = 2x$ é uma reta que passa pela origem
- ▶ $y = 2x$ está “por cima”
- ▶ $y = x^2$ está “por baixo”
- ▶ os extremos do intervalo precisam ser determinados



Exemplo 2 – Resolução

Precisamos encontrar os pontos de intersecção das curvas

$$x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

Soluções: $x = 0$ e $x = 2$

Exemplo 2 – Resolução

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 2x - x^2 \, dx \\ &= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(0 - \frac{0}{3} \right) \\ &= \frac{12 - 8}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Exemplo – 3

Exemplo 3

Calcular a área da região delimitada pelas curvas

$$y = -x^2 + 3x + 2$$

e

$$y = x^2 - 3$$

Exemplo 3 – Interpretação

$y = -x^2 + 3x + 2$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo

Vértice

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-1)2 = 9 + 8 = 17$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(-1)} = \frac{3}{2} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{17}{4}$$

Raízes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

Intercepta o eixo y no ponto $(0, 2)$

Exemplo 3 – Interpretação

$y = x^2 - 3$ é uma parábola com concavidade voltada para cima

Vértice

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 12$$

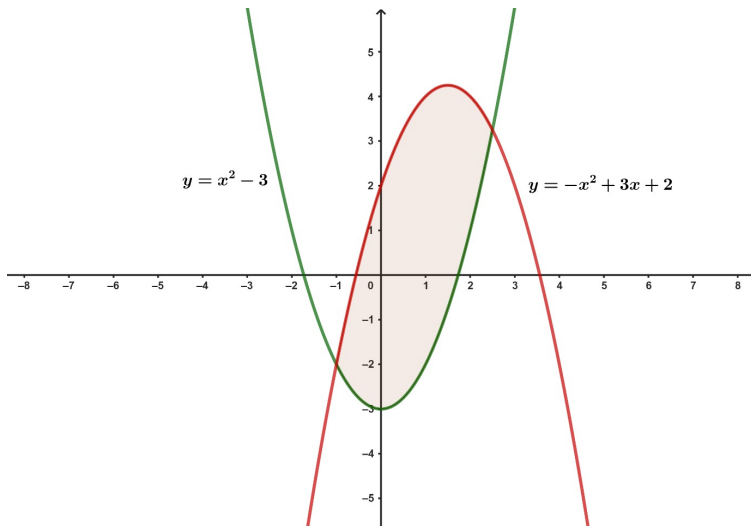
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-12}{4} = -3$$

Raízes

$$x_1 = \frac{-\sqrt{12}}{2} = \frac{-\sqrt{4}\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

Intercepta o eixo y no ponto $(0, -3)$

Exemplo 3 – Interpretação



Exemplo 3 – Resolução

Pontos de intersecção

$$-x^2 + 3x + 2 = x^2 - 3$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49$$

Soluções

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{3 - 7}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{5}{2}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{5/2} (-x^2 + 3x + 2) - (x^2 - 3) \, dx \\ &= \int_{-1}^{5/2} -2x^2 + 3x + 5 \, dx \\ &= \left(-2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_{-1}^{5/2} \\ &= \left(-\frac{2}{3} \frac{125}{8} + \frac{3}{2} \frac{25}{4} + 5\frac{5}{2} \right) - \left(-\frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{3}{2}(-1)^2 + 5(-1) \right) \\ &= \frac{343}{24} \end{aligned}$$

Exemplo – 4

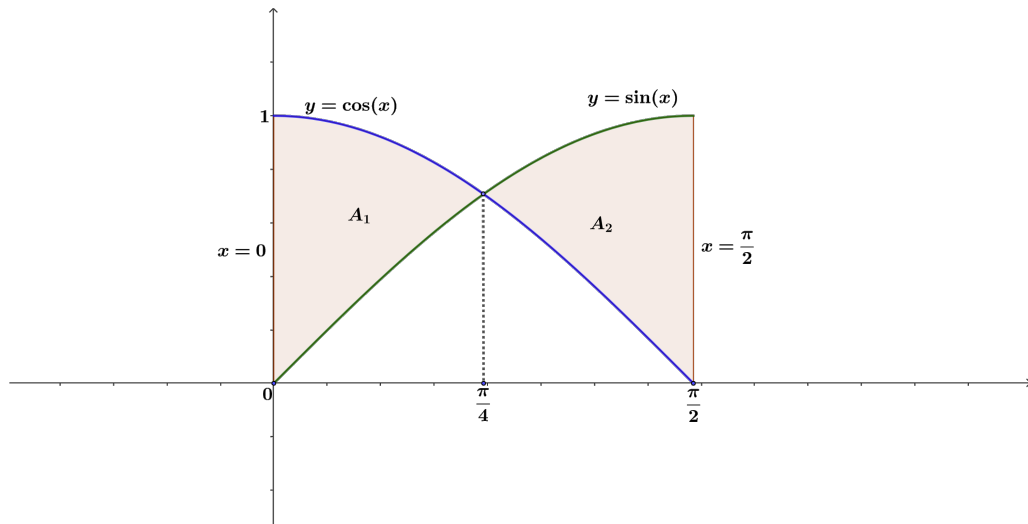
Exemplo 4

Calcule a área da região delimitada pelas curvas

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \cos(x)$$

no intervalo $[0, \pi/2]$

Exemplo 4 – Interpretação



Exemplo 4 – Interpretação

Pontos de interseção

$$\operatorname{sen}(x) = \cos(x) \quad 0 \leq x \leq \pi/2$$

$$x = \pi/4$$

Pelo gráfico podemos notar que

$$\cos(x) \geq \operatorname{sen}(x) \quad 0 \leq x \leq \pi/4$$

$$\operatorname{sen}(x) \geq \cos(x) \quad \pi/4 \leq x \leq \pi/2$$

Precisamos dividir a região em duas partes

Exemplo 4 – Resolução

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x) - \cos(x) \, dx \\ &= \left(\operatorname{sen}(x) + \cos(x) \right) \Big|_0^{\pi/4} + \left(-\cos(x) - \operatorname{sen}(x) \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \right) + \left(-0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

Poderíamos ter aproveitado a simetria da região em relação à reta $x = \pi/4$, o que nos permitiria economizar esforço ao calcular a área, uma vez que

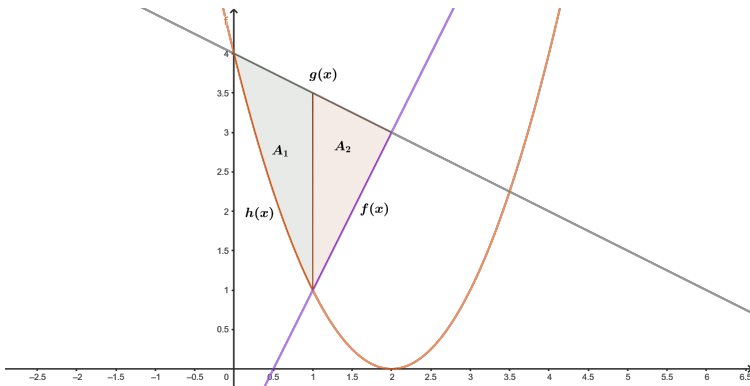
$$A = 2A_1 = 2 \int_0^{\pi/4} \cos(x) - \sin(x) \, dx$$

Exemplo – 5

Exemplo 5

Calcule a área da região expressa na figura, que é uma das regiões delimitada simultaneamente pelas três curvas

$$f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = -\frac{x}{2} + 4 \quad \text{e} \quad h(x) = (x - 2)^2$$



Exemplo 5 – Interpretação

$f(x)$ e $g(x)$ são retas

$h(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ parábola com concavidade para cima

Vértice $(2, 0)$

Raiz $x = 2$

Exemplo 5 – Interpretação

Precisamos dividir a região em duas

De 0 até 1

$$g(x) = -x/2 + 4 \quad \text{está “por cima”}$$

$$h(x) = (x - 2)^2 \quad \text{está “por baixo”}$$

De 1 até 2

$$g(x) = -x/2 + 4 \quad \text{está “por cima”}$$

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{está “por baixo”}$$

Exemplo 5 – Resolução

$$A_1 = \int_0^1 g(x) - h(x) dx$$

$$A_2 = \int_1^2 g(x) - f(x) dx$$

Exemplo 5 – Resolução

$$A_1 = \int_0^1 \left(-\frac{x}{2} + 4 \right) - (x^2 - 4x + 4) \, dx$$

$$= \int_0^1 -x^2 + \frac{7}{2}x \, dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2} \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{4} \right) - (0 - 0)$$

$$= \frac{17}{12}$$

Exemplo 5 – Resolução

$$A_2 = \int_1^2 \left(-\frac{x}{2} + 4 \right) - (2x - 1) \, dx$$

$$= \int_1^2 -\frac{5}{2}x + 5 \, dx$$

$$= \left(-\frac{5}{2} \frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(-\frac{20}{4} + 10 \right) - \left(-\frac{5}{4} + 5 \right)$$

$$= \frac{5}{4}$$

Exemplo 5 – Resolução

$$A = A_1 + A_2 = \frac{17}{12} + \frac{5}{4} = \frac{17 + 15}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

Conteúdo

Áreas entre Curvas

Exemplos

Exemplo – 1

Exemplo – 2

Exemplo – 3

Exemplo – 4

Exemplo – 5

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 3.2 da Apostila

Exercício: 1

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações